

## **Análise de Séries Temporais em Economia: abordagem da Transformada de Wavelet**

### **Time Series Analysis in Economics: Wavelet Transform approach**

Jadson Pessoa <sup>1a</sup>

Alexsandro Sousa Brito <sup>2b</sup>

Sergio Luiz de Medeiros Rivero <sup>3c</sup>

**Resumo:** O objetivo deste artigo é o de apresentar uma outra abordagem para se trabalhar com dados em séries temporais em economia do que a já tradicional abordagem sob o domínio do tempo, ou seja, a utilização da abordagem sob o domínio da frequência. Essa abordagem espectral demonstra muitas vantagens que podem trazer importantes insights para os pesquisadores particularmente interessados em ciclos e relação de liderança entre as séries. Para atingir esse objetivo apresentamos as metodologias sob o domínio da frequência, com especial atenção na metodologia Wavelet, no qual conjuga, simultaneamente, análise sob o domínio do tempo e frequência. Realizamos simulações computacionais para aplicar e exemplificar a forma de entendimento dos resultados encontrados. No entanto, apesar do grande potencial, ainda são poucos os estudos empíricos em economia que utilizam essa abordagem. Esperamos com isso motivar novas pesquisas na área no campo da análise espectral.

**Palavras-chave:** Séries Temporais; Análise Espectral; Wavelet.

**Abstract:** This paper aims to present another approach to working with time series data in economics than the already traditional time domain approach, i.e., using the frequency domain approach. This spectral approach demonstrates many advantages that can bring critical insights to researchers particularly interested in cycles and the leading relationship between series. To achieve this goal, we present the methodologies in the frequency domain, with particular attention to the Wavelet methodology, which simultaneously combines analysis in the time and frequency domain. We performed computer simulations to apply and exemplify how the results were understood. However, despite the great potential, there are still few empirical studies in economics that use this approach. We hope this will motivate further research in the field of spectral analysis.

---

<sup>1a</sup> Professor da Universidade Federal do Maranhão - UFMA vinculado ao Departamento de Economia.

<sup>2b</sup> Doutor em Ciências Sociais na área de Desenvolvimento, Agricultura e Sociedade pelo CPDA/UFRRJ.

<sup>3c</sup> Professor titular da Universidade Federal de Campina Grande na Unidade Acadêmica de Economia e Finanças.

**Keywords:** Time Series; Spectral Analysis; Wavelet.

## 1. Introdução

O estudo de séries temporais aplicado à economia tem como foco investigar a evolução de uma variável de interesse ao longo de um determinado período. Esses períodos podem ser desde segundos, como é o caso da cotação das bolsas de valores, anual, como o estoque de dívida pública em um país até décadas como os grandes ciclos de crescimento. Nesse contexto, ao investigar uma variável sob a perspectiva da evolução ao longo do tempo, alguns desafios se impõem aos pesquisadores como, por exemplo, a presença ou não de comportamentos estacionários da série, mudança de tendência, quebras estruturais, dentre outras características que alteram a estrutura e o comportamento da série. Em muitos casos, é justamente na mudança de comportamento que as séries apresentam, onde recai o nosso interesse no processo investigativo. Especialmente, para os pesquisadores dedicados nos processos de formação dos ciclos econômicos.

Dentro de campo da econometria, ou da estatística de um modo geral, essa abordagem de pesquisa de séries temporais é chamada de análise sob o domínio do tempo, pois o foco está na temporalidade do evento. Essa abordagem é, certamente, a corrente mais adotada na literatura empírica, no entanto, existe outra ainda pouco explorada nas ciências econômicas que está focada na análise do domínio da frequência.

O enfoque de análise sob o domínio da frequência, também chamada de espectral ou análise espectral, tem como objetivo investigar como diferentes frequências da série podem variar ao longo do tempo, assim como, verificar se essas frequências apresentam alguma relação espectral, isto é, de frequência, com outras variáveis de interesse (YANG, 2014).

Nesse sentido, embora tenham diferentes enfoques, sendo, portanto, métodos alternativos de pesquisa, essas duas formas de trabalhar com uma série de tempo são complementares entre si, sobretudo para os pesquisadores que buscam um maior entendimento e refinamento de um problema de pesquisa.

Dentre os métodos mais adotados há as transformadas de Fourier, e mais recentemente análise de wavelets, pois são métodos que conciliam ambos os domínios, isto é, o do tempo e da frequência. O método de wavelet, especialmente, apresenta características particularmente importantes para pesquisas econômicas como, por exemplo, a não necessidade de se trabalhar com séries estacionárias ou ajustes para quebras estruturais (IN; KIM, 2012).

Ao longo das últimas décadas, a utilização das wavelets tem se destacado como uma ferramenta valiosa na análise de séries temporais, proporcionando uma abordagem eficaz para decomposição e caracterização de padrões em diferentes escalas temporais. Trabalhos seminais sobre a aplicação da ferramenta wavelet em economia foram

conduzidos por Ramsey e Lampart (1998a), que investigaram a relação entre moeda e produção, e por Ramsey e Lampart (1998b), que exploraram o vínculo entre consumo e rendimento. Além disso, os estudos de Aguiar-Conraria e Soares (2011a) e Aguiar-Conraria e Soares (2011b) oferecem contribuições significativas para os temas macroeconômicos e os ciclos econômicos.

No entanto, apesar dessas contribuições substanciais, muitas vezes a análise e interpretação dos resultados não são triviais. Este artigo busca contribuir ao apresentar essa abordagem de forma simples utilizando dados gerados aleatoriamente (simulação computacional) e, com isso, os pesquisadores interessados no método possam conduzir suas pesquisas utilizando essa metodologia inovadora de análise espectral.

Ao longo das próximas seções, exploraremos detalhadamente as simulações computacionais realizadas, discutindo os métodos e interpretando os resultados obtidos. Dessa forma, este artigo não apenas consolida as contribuições prévias à literatura, mas também representa um avanço significativo ao apresentar aplicações simuladas que podem ser replicadas com o auxílio de interpretações simples e práticas da metodologia wavelet no contexto econômico.

Como trata-se de uma perspectiva ainda pouco explorada na literatura empírica, partiremos de uma descrição dos principais conceitos, dos quais facilitará o entendimento de como essa metodologia pode ser bastante útil para trabalhar com séries e ciclos econômicos.

Além dessa seção introdutória, o artigo está estruturado da seguinte forma: seção 2 apresentará os conceitos de Sinais e Análise de Fourier; A seção 3 apresentaremos a metodologia Wavelet, Seção 4 realizaremos simulações computacionais e, por fim, algumas conclusões finais.

## 2.Sinais

Ao investigar uma série a partir do domínio da frequência é necessário que tratemos de um termo ainda mais geral que é a ideia de sinais. Um sinal apresenta o comportamento, o estado de uma variável ou de um sistema que pode ser físico, como a posição de uma partícula, até totalmente abstrata, como a situação de quente ou frio, isto é, uma entidade que guarda informações.

Já do ponto de vista do formalismo matemático, trata-se de uma função com uma ou mais variáveis a qual representa informações sobre a natureza de um determinado fenômeno. Então, temos:  $y = f(x)$ , para um sinal unidimensional, ou  $y = f(x, z)$ , para um sinal bidimensional, e  $y = f(x, z, w)$ , quando tridimensional. E quanto ao tipo, os sinais podem ser, em relação ao tempo, definidos como contínuos ou discretos (YANG, 2014).

Em outras palavras, o sinal pode ser entendido como o conceito mais geral sobre o que podemos definir como série. Assim, sinal é qualquer entidade que representa um comportamento ou estado. Já uma série é a sequência dessas representações ou sinais.

Para trabalhar com séries em economia, sob outra perspectiva, vamos apresentar inicialmente a análise de Fourier. Esse método é bem conhecido e já estabelecido, sobretudo em outras áreas de conhecimento como geofísica, medicina e engenharia. Assim, embora nosso objetivo seja apresentar e desenvolver simulações utilizando a análise de wavelet, no entanto, em certa medida, a análise de wavelet é um refinamento da análise de Fourier. Portanto, vamos inicialmente apresentar, de forma breve, os conceitos de análise de Fourier e, então, apresentaremos a análise de wavelet, nosso método principal.

## 2.1. Análise de Fourier

O matemático francês, Jean Baptiste Joseph Fourier, apresentou em 1807 a ideia fundamental que viria a ser posteriormente desenvolvida como transformada de uma função. Segundo esse autor, qualquer função periódica poderia ser escrita através de uma soma infinita de funções senos e cossenos. Essa aproximação que utiliza funções trigonométricas ficou conhecida como transformada de Fourier (GAO; YAN, 2011).

A exemplo da técnica de transformação logarítmica, que visa transformar um número exponencial em uma relação linear, a transformada é uma técnica que busca simplificar a solução de um problema. Assim, como definição podemos entender que a transformada de Fourier ou de wavelets, que será visto adiante, como uma convolução de sinais no domínio do tempo, isto é, dadas duas funções através de um operador linear é transformada pelo produto dessas funções em um sinal do domínio da frequência. Desse modo, como aponta Masset (2008), a transformada de Fourier é a forma padrão de trabalhar com sinais sob o domínio da frequência, onde busca essencialmente projetar uma série temporal (vetor) em uma base ortonormal com elementos trigonométricos.

A transformada de Fourier pode ser expressa como:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)) \quad (1)$$

Na equação 1 a soma vai até o infinito, no entanto, ela pode ser ajustada para qualquer função que esteja em  $L^2$ , isto é, funções com integrais bem definidas em módulos, então, temos:

$$H_J(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^J (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)) \quad (2)$$

Segundo In e Kim (2012), essa equação torna-se bastante útil, pois é capaz de transformar qualquer função com soma finita ( $J$ ) em funções básicas de senos e cossenos.

Como pode ser verificado na equação 1 e 2, e dada pela própria definição, na transformada de Fourier o sinal pode ser expresso como soma de funções seno e cosseno. Nesse sentido, essa metodologia funciona muito bem para sinais que não variam com o tempo, ou seja, uma série estacionária.

Assim, com a transformada de Fourier não é possível trabalhar com sinais que variam no tempo, ainda que seja possível verificar a frequência do sinal, não é possível identificar em qual momento houve uma variação na frequência (RUA, 2012). Por isso, Gabor (1946) desenvolveu a transformada de Fourier com janelas, onde a ideia principal é trabalhar com a transformada de Fourier em tempos curtos ao longo do sinal.

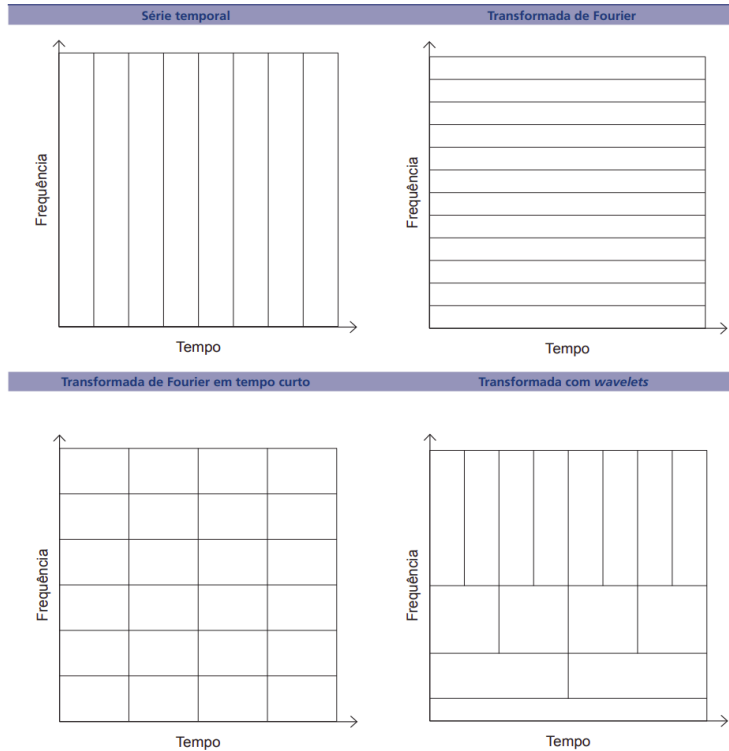
O sinal  $f(x)$  é dividido em seções menores e cada seção será analisada em sua frequência separadamente. Dessa forma, é possível identificar quando e qual frequência houve uma mudança de ciclo, no entanto, com um nível de precisão limitada, já que está condicionada ao tamanho da janela utilizada pelo pesquisador.

Assim, o grande empecilho da transformada de Fourier com janela de tempo curto é que, ao escolher o tamanho da janela, ela será constante ao longo da série analisada. Assim, em um contexto com uma série longa, com a janela fixa em um tempo curto haverá uma tendência de gerar uma sobre-representação de ciclos de alta frequência, em detrimento de ciclos de baixa frequência. Não sendo, portanto, uma representação adequada das resoluções de frequências que variam no tempo.

Essa limitação foi superada pelo método da transformada de wavelet, que segundo In e Kim (2012), Wavelet apresenta três vantagens, quando comparada com as transformadas de Fourier. A primeira vantagem é a capacidade das wavelets de decompor os dados em muitas escalas de tempo ao invés de domínio da frequência. Deste modo, é possível analisar o comportamento dos sinais ao longo de várias escalas de tempo, isto é, ciclos de tempo curto ou longo. A segunda vantagem é possibilitar que as janelas de tempo possam variar, diferentemente da janela fixa do Fourier. A vantagem recai na possibilidade de isolar descontinuidades do sinal. E por fim, têm a vantagem de lidar com séries que contenham dados não estacionários.

Para um melhor entendimento dessas vantagens, o gráfico 1 em Rua (2012), ilustra essa discussão e torna ainda mais evidente o que seria uma representação no espaço tempo-frequência. Em uma série temporal, que está representada exclusivamente em espaço no domínio do tempo, cada observação da variável está presente em todas as frequências. Por outro lado, na transformada de Fourier, os pontos representam as frequências e em cada ponto está presente todas as observações no domínio do tempo. Já para Fourier de tempo curto a dimensão tempo-frequência é utilizada uma janela de tamanho fixo. Em contraste, para a transformada de wavelets o tamanho da janela é flexível às diferentes frequências existentes.

**Figura 1 - Comparação da representação no espaço tempo-frequência**



**Fonte: (RUA, 2012, p. 74)**

Dadas essas vantagens apresentadas, para os pesquisadores que trabalham com ciclos econômicos, as transformadas de wavelets passam a ser bastante úteis, já que ao longo dos dados as séries apresentam tendências, quebras estruturais, dentre outras dificuldades típicas desse tipo de investigação.

### 3. Análise de Wavelets

Nesta seção, vamos apresentar as propriedades e vantagens das aplicações da wavelet em economia, tendo como foco as wavelet contínuas, mas também vamos apresentar wavelet para tempo discreto. Para um aprofundamento dos fundamentos de análise de wavelet, Daubechies (1993) é o livro de referência no tema e apresenta um amplo desenvolvimento das propriedades matemáticas. Trabalhos seminais sobre aplicação da ferramenta wavelet em economia temos os desenvolvidos por Ramsey e Lampart (1998a),

onde trabalharam com a relação entre moeda e produção, e Ramsey e Lampart (1998b) que investigaram o nexa entre consumo e rendimento. Os trabalhos de Aguiar-Conraria e Soares (2011a) e Aguiar-Conraria e Soares (2011b) nos dão uma grande contribuição aos temas macroeconômicos e de ciclos econômicos. O texto de Crowley (2007) nos apresenta uma revisão das aplicações em economia e finanças, e para uma revisão de literatura mais recente temos o trabalho de He e Nguyen (2015) que apresentou uma revisão de estudos sobre economia e finanças.

### 3.1. Transformada contínua com wavelets

A transformada contínua de wavelet (CWT, do acrônimo em inglês *continuous wavelet transform*) é definida como a integral do sinal multiplicado por sinais que foram dilatados (escalonado) ou movimentados de posição da função  $\Psi$ . Assim, uma CWT para uma série temporal  $x_{(t)}$  pode ser descrita como:

$$CWT_{(s,p)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{(t)} \psi_{(s,p,t)} dt \quad (3)$$

Onde  $s$ ,  $p$  e  $t$  são, respectivamente, a escala, posição e o tempo. Como resultado teremos muitos coeficientes CWT que estarão relacionados com cada escala e posição e podem ser assumidos quaisquer valores que sejam compatíveis com o ponto da série temporal  $x_{(t)}$ . Assim, quando for multiplicado cada coeficiente pela Wavelet dilatada (escalada) e deslocada, teremos o sinal original. Esse procedimento é similar ao da transformada de Fourier, no qual multiplica senos e cossenos para obter o sinal original.

A função básica de CWT é  $\psi_{(s,p,t)}$ . Usualmente, essas funções básicas são chamadas de wavelet mãe (*mother wavelet*) e podem ser definidas como:

$$= \frac{1}{\sqrt{s}} \psi \left( \frac{t-p}{s} \right) \quad (4)$$

Onde,  $p$  representa a posição do tempo e  $s$  o parâmetro da escala. Assim, do ponto de vista da frequência, escalas baixas revelam ciclos de curto prazo, ou seja, alta frequência, ao passo que escalas altas apresentam ciclos mais lentos, ou seja, baixas frequências.

Para ser candidata a uma wavelet mãe, segundo Percival e Walden (2000),  $\psi(t)$  deve apresentar as seguintes propriedades: admissibilidade, ortogonalidade e momento *vanishing*<sup>4</sup>.

A primeira condição tem utilidade teórica, pois, da mesma forma que na transformada de Fourier, é necessário satisfazer a condição de que o intervalo de integração apresente continuidade ou ao menos pontos descontínuos limitados. A segunda condição da ortogonalidade segue a mesma definição da transformada de Fourier, isto é, as funções deslocadas na mesma escala são ortogonais, e ainda, que funções em outras escalas também são ortogonais. Por fim, o momento *vanishing* ou momento de suavização em uma tradução livre, significa que a função de escala é mais ou menos suave. O efeito da suavização é definido na equação wavelet 4.

### 3.2. Filtro Morlet de processamento wavelet

A escolha da wavelet mãe  $\psi(t)$  é um passo importante da pesquisa. A literatura especializada sobre a questão apresenta uma variedade de possibilidades, tais como, Haar, Morlet, Daubechies, Mexican Hat, Meyer, Shearlet, dentre muitas outras possibilidades, que vão depender da aplicação e da especificidade da pesquisa que será desenvolvida (MASSET, 2008).

De acordo com Rua (2012), como nosso objetivo é investigar a coerência dos preços imobiliários como PIB e o juro, devemos procurar uma Wavelet com foco nas fases dos ciclos e na amplitude da série. E ainda segundo o autor citado, o filtro mais popular e sugerido para aplicações em economia para trabalhos com transformadas contínuas com wavelet é a wavelet de Morlet. De forma complementar, para Aguiar-Conraria e Soares (2011b), além de recomendar a utilização da wavelet de Morlet, justifica que ela é vantajosa por apresentar atributos amigáveis que simplificam a interpretação dos resultados.

Para entender os motivos da recomendação da wavelet de Morlet é importante entender também o contexto, além das próprias características desse filtro. Assim, em 1981, Jean Morlet, um geofísico francês de uma indústria petrolífera, desenvolveu um trabalho pioneiro com abalos sísmicos, apresentando um novo método de análise de frequência temporal (MORLET et al., 1982). Esse método, mais tarde, ficou conhecido com wavelet de Morlet.

Em termos gerais, os geofísicos utilizam a emissão de som para inferir o tipo de material rochoso e com isso determinar a localização de jazidas, por exemplo. Como as ondas de som se propagam com diferentes frequências a depender do material em que o abalo sísmico foi gerado, o processamento de sinal é uma tarefa importante desse trabalho.

---

<sup>4</sup> Para um aprofundamento sobre as propriedades de uma wavelet mãe ver: (PERCIVAL; WALDEN, 2000)



No entanto, a passagem do som de uma camada para outra apresenta mudanças abruptas ou quebras na frequência do som. Foi então que Morlet desenvolveu uma análise mais flexível que aquela utilizada na transformada de Fourier (RUSSELL; HAN, 2016).

Para uma série temporal  $x(t)$ , a wavelet Morlet por ser definida como:

$$\psi(t) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{i\omega_0 t} e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (5)$$

Como podemos verificar na equação 5 a wavelet Morlet trata-se de um seno complexo definido dentro de um envelope Gaussiano. Segundo Rua (2012), uma das vantagens de se trabalhar com Morlet é sua característica complexa, permitindo que amplitude e a fase sejam dependentes do tempo em cada frequência. O parâmetro  $\omega_0$  é utilizado para ajustar a resolução do ponto de vista da frequência da localização no tempo, assim, a depender de cada caso, pode ser melhorado ou reduzido a resolução necessária. Para um maior aprofundamento sobre as características e vantagens que tornaram a wavelet Morlet popular nesse campo de pesquisa ver, Addison (2017).

### 3.3. Análises com wavelet

Ao se trabalhar com relação entre duas séries de tempo, partimos do pressuposto que precisamos de um instrumento para quantificar e detectar adequadamente a relação entre duas variáveis. Para esse fim, vamos utilizar o espectro com wavelet que é definido como  $|W_x(p, s)|^2$ , no qual mede a participação para a variância da série em um ponto específico do tempo e frequência. Para o caso de duas séries, a transformada de cruzada de wavelet é representada de forma equivalente:

$$W_{xy}(p, s) = W_x(p, s)W_y(p, s) \quad (6)$$

Dado pela equação 6, os choques econômicos, como é o caso das crises, por exemplo, elas estarão associadas a uma maior potência da wavelet (*wavelet power spectrum*) e, portanto, variação da série temporal.

Outra importante ferramenta de análise que utilizaremos na simulação será a coerência com wavelet, definida como entre duas séries  $x(t)$  e  $y(t)$ , como:

$$R^2(p, s) = \frac{|S(s^{-1}W_{xy}(p, s))|^2}{S(s^{-1}|W_x(p, s)|^2)S(s^{-1}|W_y(p, s)|^2)} \quad (7)$$

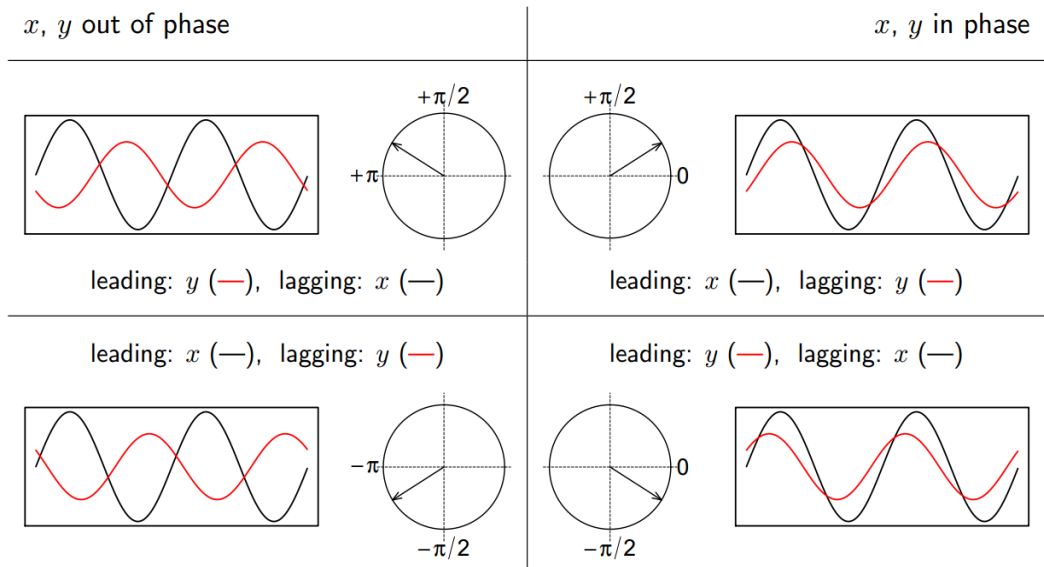
Onde  $S(\cdot)$  representa o alisamento ou suavização (*smoothing*), seja no tempo ( $t$ ) ou na escala ( $s$ ). O alisamento é fundamental para que o resultado da coerência não seja sempre igual a 1. O objetivo da coerência de wavelet é verificar o quão relacionadas estão duas séries ao longo do tempo e em diferentes frequências. Como resultados temos um valor entre 0 e 1, onde valores elevados representam alta relação e um resultado baixo uma fraca coerência (AGUIAR-CONRARIA; AZEVEDO; SOARES, 2008).

Uma última simulação que será desenvolvida será o de verificar relação (*lead-lag*), isto é, em quais séries apresentam uma situação de liderança. Para essa simulação é utilizado o conceito de diferença de fase com wavelet que é definida formalmente como:

$$\phi_{x,y}(p, s) = \tan^{-1} \left( \frac{\Im(W_{xy}(p, s))}{\Re(W_{xy}(p, s))} \right) \quad (8)$$

Onde,  $\Im$  representa à parte imaginária e  $\Re$  o lado real. Os valores de  $\phi_{x,y}(p, s)$  estão entre  $[-\pi, \pi]$ . A interpretação do resultado é realizada pela diferença de fase, desse modo, se ambas as séries se movimentam juntas e com a mesma frequência, a diferença de fase será igual a zero. Se  $\phi_{x,y}(p, s)$  pertencer ao intervalo  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , as duas séries estão na mesma fase, mas a série  $x$  lidera o movimento e se  $\phi_{x,y}(p, s)$  estiver no intervalo de  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$  é a série  $y$  que lidera. Agora, se  $\phi_{x,y}(p, s)$  estiver no intervalo de  $[0, -\frac{\pi}{2}]$ ,  $y$  lidera  $x$  e, por fim, se o resultado estiver no intervalo de  $[-\frac{\pi}{2}, -\pi]$ ,  $y$  quem lidera é  $x$ . A figura 2 nos ajuda para uma melhor visualização e consolidação das informações apresentadas sobre as diferenças de fases.

**Figura 2- Diferenças de fase e sua interpretação**



**Fonte: Roesch e Schmidbauer (2014, p. 7)**

Uma vantagem desse resultado é apresentar se a relação de *lead-lag* para as frequências analisadas foi alterada ao longo do tempo. Como aponta Klarl (2016), em um sentido geral, os resultados podem ser interpretados como com uma opção para as análises de causalidade de Granger. Para as nossas simulações, esse resultado nos ajudará a descobrir qual série tem a condição de liderança.

#### 4. Dados simulados para Análises de Wavelets

Essa seção tem como objetivo trazer ao leitor uma primeira aproximação dos resultados típicos de uma análise wavelet para séries univariadas, mas principalmente, para séries bivariadas.

Para os exemplos aqui simuladores, utilizamos os presentes no guia do pacote WaveletComp que está disponível para livre acesso no repositório oficial da linguagem R (ROESCH; SCHMIDBAUER, 2018) com adaptações, sobretudo no tamanho dos ciclos, para que pudéssemos ter outros exemplos para além dos já disponível no texto citado. É importante salientar que não temos como objetivo esgotar todos os exemplos apresentados

no guia, portanto, não substituindo a leitura atenta do texto original, mas que possa servir de motivação ao leitor interessado no tema<sup>5</sup>.

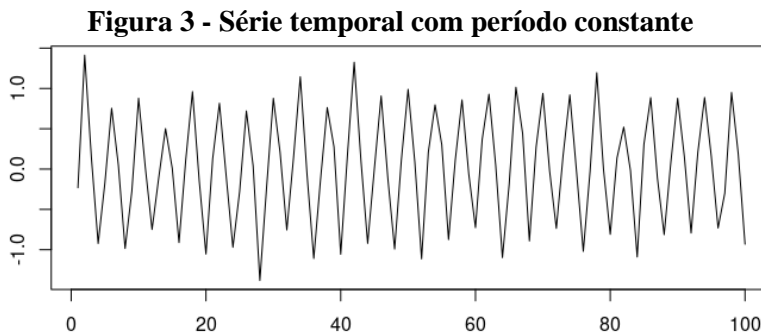
Vamos inicialmente apresentar um exemplo para dados univariados com e sem período constante, focando fundamentalmente na interpretação e análise dos gráficos, já que são esses as principais saídas da abordagem espectral. Por fim, apresentamos os resultados para um exemplo simulado para dados bivariados.

Ainda para o leitor interessado pelo tema, e para que seja possível a reprodutibilidade de todos os gráficos apresentados, o *script* ou a programação em linguagem R que foi utilizada para a construção de todos os gráficos também estão disponibilizados no repositório (NOME SUPRIMIDO PARA MANTER ANONIMATO).

#### 4.1.Simulação 1: Análise de série temporal univariada - Com período constante

Partindo do entendimento sobre os diferentes tipos de ciclos presentes em uma série, verificamos que elas podem apresentar ciclos constantes, isto é, que se repetem seguindo um determinado padrão, a cada 2 anos, por exemplo, ou ainda, que variam no tempo, ou seja, não apresentam uma determinada regularidade, como por exemplo, ciclos de 2, 4, 1, 6 anos, nesse sentido, não há, a partir de uma determinada frequência, um padrão regular.

Nessa simulação vamos apresentar, inicialmente, um simples exemplo simulado com 100 unidades de tempo e ciclo constante de 4, além de um ruído (*random walk*), conforme apresentado na figura 3. Portanto, esse gráfico é um simples *plot* da série temporal à nossa disposição para análise espectral.



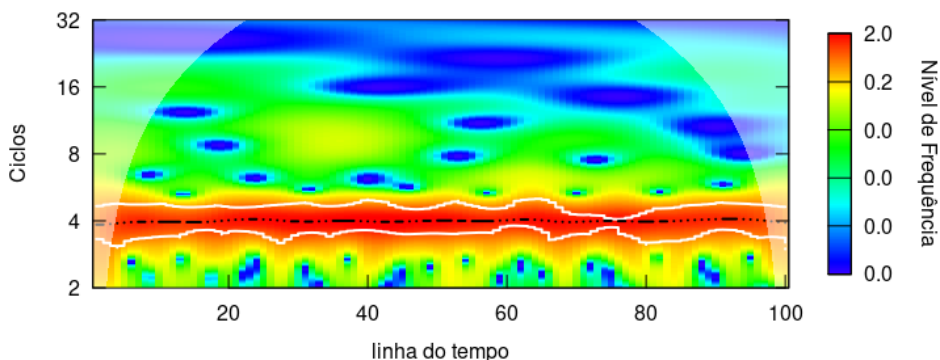
**Fonte: Elaboração própria**

---

<sup>5</sup> E para um aprofundamento de outras análises simuladas e com rigor na estrutura formal matemática, ver: (AGUIAR-CONRARIA; SOARES, 2014)

Algumas explicações introdutórias são importantes. As 100 unidades de tempo que foram geradas para os dados simulados representam o tamanho efetivo da nossa série de tempo, portanto, a unidade de tempo, a depender de cada caso, pode ser mensal, quadrienal, anual, etc., ou seja, representa o tamanho de nossa base de dados disponível para o processo investigativo. A escolha do tamanho do ciclo de 4 é uma definição *a priori*, apenas para que fosse possível iniciar o processo gerador de dados. Obviamente que esse parâmetro, quando analisados os dados empíricos, não teremos acesso inicialmente, mas muito pelo contrário, é justamente essa informação que estaremos à procura. Esse parâmetro poderá ser encontrado no gráfico 4.

**Figura 4 - Análise univariada de Wavelet para dados simulados**



**Fonte: Elaboração própria**

O gráfico 4, chamado de análise de força local, apresenta a média da força ao longo da série. Cores que se aproximam do vermelho são as regiões onde há alta frequência e próximos do azul, baixa frequência. Nesse sentido, essa análise se aproxima do entendimento de um “mapa de calor” padrão, onde altas frequências são representadas pelas cores mais quentes da paleta de cores que está sendo utilizada.

Quanto à leitura do gráfico 4, o eixo das abscissas no plano cartesiano (eixo x) representa o tamanho da série temporal em que estamos trabalhando, em nosso caso, 100 unidades de tempo. Já o plano das ordenadas (eixo y), representa a formação dos ciclos completos, e para facilitar compreensão está na em unidades de tempo, portanto, são ciclos de 2, 4, 8, 16 e 32, pois são esses os ciclos plotados no gráfico. A linha branca ao longo do espectro com alta frequência representa nossa região local de significância estatística a 5% e o sino branco invertido na área de influência dos dados.

Como trata-se de uma série constante no tempo, a região de alta frequência e com significância estatística encontra-se ao longo da faixa ou banda de 4 anos, como já era esperado, pois foi gerado para tal fim. Nesse sentido, mesmo que nós não tivéssemos acesso ao processo gerador de dados, o que na maioria das vezes não temos acesso, seria possível

identificar simplesmente observando diretamente o gráfico de espectro local a região, ou as regiões, com significância estatística.

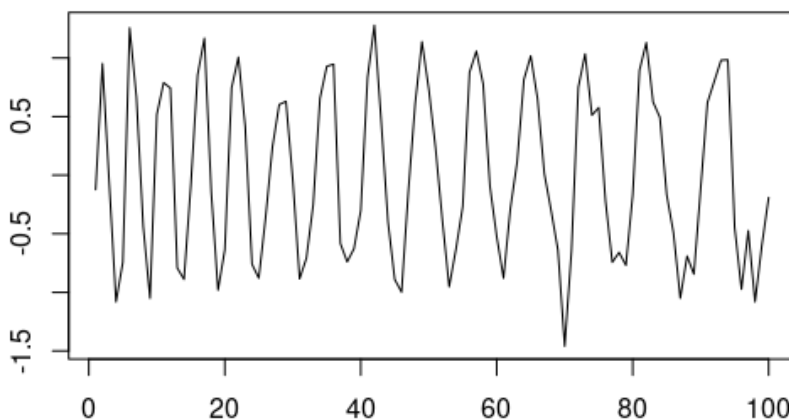
Outro ponto importante para apontar é que, como trata-se de uma identificação das forças locais, cada ponto no eixo x (nossos períodos de análise) são analisados para aquele ano. Nesse sentido, poderíamos ter para cada ano forças locais diferentes, tais como 4, depois 8, em seguida 16 e retornando para 4. Esse padrão mais irregular é o que efetivamente acontece, em geral, com os dados empíricos para séries mais longas com presença de quebras estruturais, por exemplo. Mas, como já foi salientado, geramos uma série mais simples com ciclos constantes no tempo para uma primeira aproximação a título de exemplo.

Para contemplar séries irregulares ou que variam no tempo, vamos apresentar uma simulação com uma série em que há presença de ciclos no qual variam no tempo, para assim, pôr ainda mais relevo à forma de análise e interpretação dos gráficos.

## 4.2.Simulação 2: Análise de série temporal univariada - Com período variável

Novamente plotamos nossa série temporal e conforme pode ser no gráfico 5, no domínio do tempo não é possível realizar qualquer tipo de análise mais robusta quanto a periodicidade espectral da série, isto é, não é possível responder perguntas como: qual frequência da série ou mesmo se a frequência, isto é, os ciclos variam ou são constantes ao longo do estudo, como foi o caso do exemplo anterior. Por isso, para investigação sobre o domínio da frequência, e não somente no domínio do tempo, como é o caso do gráfico em questão, é fundamental a adoção de uma abordagem espectral para proporcionar respostas às questões levantadas.

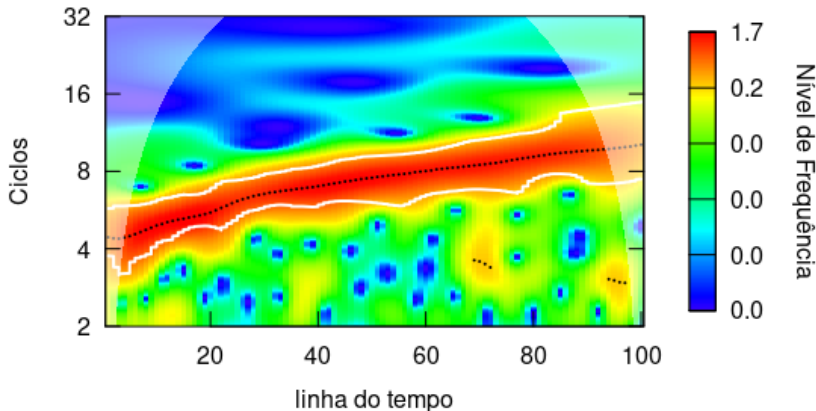
**Figura 5 - Série temporal com período variável**



**Fonte: Elaboração própria**

Para responder às questões apontadas, e muitas outras do ponto de vista de frequência da série, utilizamos o gráfico 6. A leitura da figura, eixos e áreas de significância continua sendo a mesma que já foi apresentada no exemplo anterior. No entanto, como pode ser rapidamente identificado, a força local não se apresentou de forma constante ao longo do período analisado, mas com uma elevação ao longo do recorte empírico simulado, saindo de 4 para o início dos dados até alcançar mais de 8 anos de ciclos.

**Figura 6 - Análise univariada de Wavelet para dados simulados - período variável**



**Fonte: Elaboração própria**

Como o gráfico 6 refere-se à análise local, e no que diz respeito à interpretação e conclusão espectral, os dados simulados vem apresentando, ao longo do período investigado, uma elevação dos ciclos em mais do que o dobro em relação ao período inicial. Sendo assim, passou a desenvolver ciclos longos (mais de 8 anos) para a formação completa dos últimos dados que foram simulados.

### 4.3. Simulação 3: Análise de série temporal bivariada

Agora vamos apresentar como é realizada a interpretação das nossas séries ou sinais para o caso de duas variáveis conjuntamente, ou em outros termos, realizar uma análise bivariadas. Esse estudo bivariado é o ponto principal do capítulo, pois estamos mais focados em investigar como se comportam as séries em uma situação de liderança, isto é, qual série de tempo se apresenta como sendo o sinal que inicia o movimento cíclico.

Obviamente que o tamanho do ciclo, como foi apresentado nos exemplos anteriores, também fazem parte dos nossos estudos, portanto, o entendimento continuará a ser o mesmo que foi realizado anteriormente, mas que agora, será para dois sinais

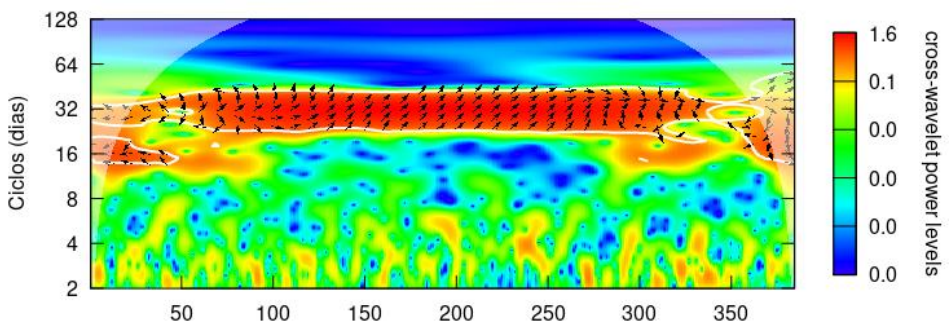
simultaneamente, sendo assim, nosso foco com esse exemplo será em apresentar a interpretação dos resultados de lideranças para o caso bivariado.

A forma de organização da figura 7 é o padrão que é apresentado em casos empíricos. Sendo assim, o painel (a) é apresentado à coerência local para o caso bivariado. O painel (b) a coerência global e, por fim, a parte (c) a situação de liderança ou diferença de fases. Vamos descrever cada um desses painéis com mais detalhes para o melhor entendimento.

Iniciamos com o painel 7a - Coerência Local, onde contém, além do mapa de calor, que deve ser analisado como apresentado anteriormente, as setas na cor preta, no qual representa a situação de liderança entre as séries para um dado período de nossa base de dados, por isso uma análise local. Dessa forma, essas setas simbolizam a situação de liderança e são interpretadas com base na figura 2 (Diferenças de fases e sua interpretação). A leitura dos eixos x e y é realizada de forma similar ao que já foi apresentado nos outros exemplos precedentes, no entanto, é importante ressaltar que, os dados simulados estão em dia, portanto, ciclos de 2, 4, 8 16, 32 64 dias plotados no eixo x são os possíveis ciclos a ser analisado.

**Figura 7 - Análise Bivariada de Wavelet para dados simulados**

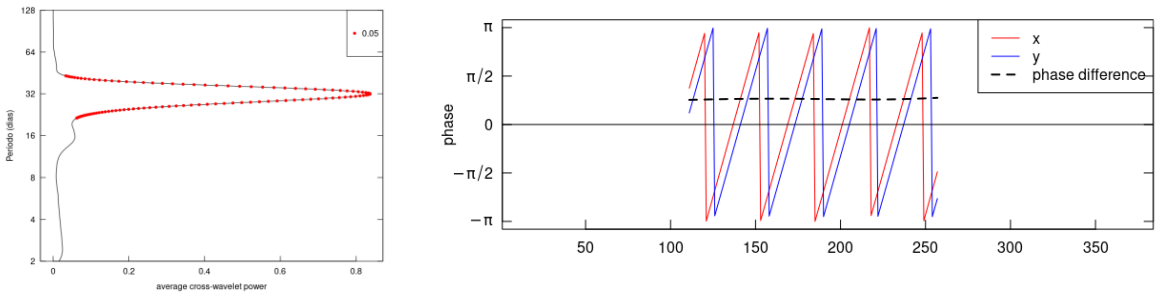
(a) Coerência Local Wavelet



(b) Coerência Global Wavelet

(c) Diferença de Fases





**Fonte: Elaboração própria**

Já do ponto de vista da interpretação do resultado apresentado para dados simulados podemos concluir que, ao longo da série investigada houve uma forte coerência local na faixa dos 32 dias de ciclos. Importante salientar que a coerência pode ser cíclica (no mesmo sentido do ciclo) ou contracíclica (em sentidos opostos), ou utilizando a nomenclatura espectral, a coerência pode estar em fase (ou cíclica) ou fora de fase (contracíclica), essa informação está disponível no painel (c), apresentada em seguida. Assim, caso o pesquisador deseje desenvolver análises de coerência local ponto a ponto na série é possível realizar com o presente gráfico de força local de wavelet.

No painel (b) temos uma média global da coerência wavelet, isto é, esse resultado leva em consideração toda a série em conjunto, portanto, sem salientar como se comportou o sinal ao longo do tempo sob análise, como foi exposto no painel (a). Os pontos em vermelho representam as frequências com nível de significância a 5%, e como pode ser observado, nossos dados simulados apresentam uma frequência global de 32 dias. Novamente, observe que nesse exemplo, a fonte geradora dos dados simulou informações para dias. Portanto, nossas análises e interpretação são dias e não anos como foi realizado anteriormente.

Por fim, o painel (c) tem um importante instrumento analítico de estudo com frequência bivariada que é a verificação da situação de liderança entre as séries. Esse resultado tem por objetivo identificar não apenas como se os sinais estão em coerência, como também, apresentar qual delas está iniciando o processo cíclico, isto é, situação de liderança.

Ainda tendo como referência o gráfico 2 (Diferenças de fases e sua interpretação), iniciamos a leitura pelo eixo x do gráfico intitulado “fase” ou “*phase*”, em inglês. Nosso ponto de referência é a linha pontilhada na cor preta, então, caso essa linha esteja entre  $\pi/2$  e  $-\pi/2$  as séries estão em fase ou coerente de forma cíclica. Já se a linha pontilhada estiver entre  $\pi/2$  e  $\pi$  ou  $-\pi/2$  e  $-\pi$  as séries estão fora de fase ou sem coerência cíclica. E como pode ser verificado em nosso exemplo simulado, a relação de coerência da série bivariada encontra-se em fase (coerência cíclica), pois está entre  $\pi/2$  e  $-\pi/2$ .

Agora para verificar qual das séries está liderando o ciclo (situação de *lead-lag*) ainda devemos fazer uso do gráfico 2 (Diferenças de fases e sua interpretação), assim, caso nossa linha pontilhada esteja acima de 0, a série  $x$  está liderando o ciclo, independente se em fase ou fora de fase, por outro lado, se a linha pontilhada estiver abaixo de 0 quem lidera o ciclo é o sinal  $y$ .

Podemos concluir, portanto, que nossos dados simulados estão em coerência, como foi verificado, e apontar que, quem está liderando os ciclos é a série  $x$ . E essa liderança se manteve estável ao longo de todo o período analisado, pois não apresentou situação de troca de liderança, conforme pode ser confirmado no gráfico 7c. É importante ressaltar que no exemplo não houve mudança, mas que pode ocorrer a troca de liderança, e será essa linha pontilhada que apontará para tal situação.

## 5. Conclusões

A análise de séries temporais é uma ferramenta essencial na compreensão da evolução de variáveis econômicas ao longo do tempo. Este artigo se propôs a explorar não apenas a análise sob o domínio do tempo, mas também a abordagem inovadora da análise sob o domínio da frequência, especialmente através da metodologia wavelet.

Ao longo das últimas décadas, a utilização das wavelets tem ganhado destaque como uma ferramenta valiosa na decomposição e verificação de padrões de liderança entre os ciclos em diferentes escalas temporais. No entanto, apesar das contribuições substanciais, a análise e interpretação dos resultados ainda são desafiadoras.

Sendo assim, este artigo buscou preencher essa lacuna ao apresentar de forma simples e prática a metodologia wavelet, utilizando dados simulados que podem ser replicados. Essa abordagem não apenas consolida as contribuições anteriores à literatura, mas representa um avanço significativo ao oferecer aplicações simuladas em computador que podem ser replicadas e interpretadas de maneira acessível no contexto econômico.

Esperamos que à medida que essa perspectiva, ainda pouco explorada na literatura empírica, é apresentada de forma mais acessível, espera-se que pesquisadores possam encontrar na metodologia wavelet um valioso instrumento para o estudo de séries e ciclos econômicos. O aprofundamento dessas técnicas pode proporcionar uma compreensão mais rica e refinada dos fenômenos econômicos, abrindo novos caminhos para a análise e previsão de variáveis fundamentais para a economia.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADDISON, P. S. **The Illustrated Wavelet Transform Handbook: Introductory Theory and Applications in Science, Engineering, Medicine and Finance**, Second Edition. [s.l.] CRC Press, 2017.

AGUIAR-CONRARIA, L.; AZEVEDO, N.; SOARES, M. J. **Using wavelets to decompose the time–frequency effects of monetary policy.** *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 387, n. 12, p. 2863–2878, maio 2008.

AGUIAR-CONRARIA, L.; SOARES, M. J. **Oil and the macroeconomy: Using wavelets to analyze old issues.** *Empirical Economics*, v. 40, n. 3, p. 645–655, maio 2011a.

AGUIAR-CONRARIA, L.; SOARES, M. J. **Business cycle synchronization and the Euro: A wavelet analysis.** *Journal of Macroeconomics*, v. 33, n. 3, p. 477–489, set. 2011b.

AGUIAR-CONRARIA, L.; SOARES, M. J. **The continuous wavelet transform: moving beyond uni- and bivariate analysis.** *Journal of Economic Surveys*, v. 28, n. 2, p. 344–375, abr. 2014.

CROWLEY, P. M. **A guide to wavelets for economists.** *Journal of Economic Surveys*, v. 21, n. 2, p. 207–267, abr. 2007.

DAUBECHIES, I. **Ten Lectures on Wavelets.** *Mathematics of Computation*, v. 61, n. 204, p. 941, 1993.

GABOR, D. **Theory of communication. Part 1: The analysis of information.** *Journal of the Institution of Electrical Engineers - Part III: Radio and Communication Engineering*, v. 93, n. 26, p. 429–441, nov. 1946.

GAO, R. X.; YAN, R. **From Fourier Transform to Wavelet Transform: A Historical Perspective.** Em: GAO, R. X.; YAN, R. (Eds.). *Wavelets*. Boston, MA: Springer US, 2011. p. 17–32.

HE, T.-X.; NGUYEN, T. **Wavelet analysis and applications in economics and finance.** *Journal of Statistics and Mathematical Science*, v. 1, n. 1, p. 22–37, 2015.

IN, F.; KIM, S. **An introduction to wavelet theory in finance: a wavelet multiscale approach.** Singapore ; Hackensack, NJ: World Scientific, 2012.

KLARL, T. **The nexus between housing and GDP re-visited: A wavelet coherence view on housing and GDP for the U.S.** *Economics Bulletin*, v. 36, n. 2, p. 704–720, 2016.

MASSET, P. **Analysis of Financial Time-Series Using Fourier and Wavelet Methods.** *SSRN Electronic Journal*, 2008.

MORLET, J. et al. **Wave propagation and sampling theory—Part I: Complex signal and scattering in multilayered media.** *GEOPHYSICS*, v. 47, n. 2, p. 203–221, fev. 1982.

PERCIVAL, D. B.; WALDEN, A. T. **Wavelet Methods for Time Series Analysis.** Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

RAMSEY, J. B.; LAMPART, C. **Decomposition of economic relationships by timescale using wavelets.** *Macroeconomic Dynamics*, v. 2, n. 1, p. 49–71, 1998a.

RAMSEY, J. B.; LAMPART, C. **The Decomposition of Economic Relationships by Time Scale Using Wavelets: Expenditure and Income.** Studies in Nonlinear Dynamics e Econometrics, v. 3, n. 1, abr. 1998b.

ROESCH, A.; SCHMIDBAUER, H. **Package WaveletComp.** CRAN, 2014. Disponível em: <<https://cran.r-project.org/web/packages/WaveletComp/index.html>>. Acesso em: 27 set. 2021

ROESCH, A.; SCHMIDBAUER, H. **A Guided Tour through the Town.** , 2018. Disponível em: <<http://www.hs-stat.com/WaveletComp/>>. Acesso em: 27 jun. 2021

RUA, A. **Wavelets in economics.** Banco de Portugal, Economic bulletin, p. 71–79, 2012.

RUSSELL, B.; HAN, J. **Jean Morlet and the Continuous Wavelet Transform.** CREWES Research Report, v. 28, n. 1946, p. 1–15, 2016.

YANG, W. Y. **Signals and Systems with MATLAB.** 2009<sup>a</sup> edição ed. Berlin: S