

A Teoria Antropológica do Didático como uma ferramenta metodológica para o estudo das relações métricas no triângulo retângulo

The anthropological theory of didactics as a methodological tool for the study of metric relations in the right triangle

Iolanda Possidonio dos Santos Silva¹
Edelweis José Tavares Barbosa²

Resumo

Essa pesquisa é um recorte de uma dissertação de mestrado, que teve como objetivo analisar as praxeologias matemáticas e didáticas acerca das relações métricas no triângulo retângulo presentes nas coleções de livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental e dos livros didáticos do Ensino Médio escritas pelos mesmos autores, a fim de identificar como acontece a passagem desse saber matemático de uma etapa de ensino para outra. Como aporte teórico, utilizou-se a Teoria Antropológica do Didático (TAD) proposta por Chevallard (1999) e seus colaboradores, que permitiu a identificação das praxeologias presentes nos livros didáticos 'Matemática Realidade & Tecnologia', 'Teláris Matemática', '#Contato Matemática' e 'Matemática Contexto & Aplicações'. As análises realizadas apontam que esses autores dão ênfase no Teorema de Pitágoras como principal técnica de resolução e na construção do ambiente tecnológico-teórico, explorando nas tarefas a resolução por meio da aplicação de fórmulas. Acredita-se que as abordagens que foram desenvolvidas nos livros analisados contribuem para que o ensino e aprendizagem das relações métricas no triângulo retângulo e conseqüentemente da geometria, continue passando por dificuldades, sendo esse um dos fatores para que se avance no ensino da geometria.

Palavras chave: livro didático; relações métricas no triângulo retângulo; Teoria Antropológica do Didático.

Abstract

This research is a cut of a master's dissertation, which aimed to analyze the mathematical and didactic praxeologies about metric relations in the right triangle present in the collections of textbooks of the final years of elementary school and high school textbooks written by the same authors, in order to identify how does the passage of this mathematical knowledge from one stage of education to another. The Anthropological Theory of Didactics (TAD) proposed by Chevallard (1999) and his collaborators was used as theoretical support, allowing the identification of the praxeologies present in the 'Mathematics Reality & Technology', 'Teláris

¹ Universidade Federal de Pernambuco | iolandapds2@gmail.com

² Universidade Federal de Pernambuco | edelweis.barbosa@ufpe.br

Mathematics', '#Contact Mathematics' and 'Mathematics Context & Applications' textbooks. The analyses performed point out that these authors emphasize the Pythagorean Theorem as the main resolution technique and the construction of the technological-theoretical environment, exploring in the tasks the resolution through the application of formulas. It is believed that the approaches that were developed in the analyzed books contribute to the teaching and learning of metric relations in the right triangle and consequently of geometry, continue experiencing difficulties, and this is one of the factors to make progress in the teaching of geometry.

Keywords: textbook; metric relations in the right triangle; Anthropological Theory of Didactics.

Introdução

O estudo da geometria tem um importante papel no currículo de matemática, por estar presente em nosso dia a dia e nas práticas profissionais, como, na arquitetura, na engenharia, nas artes plásticas, etc.

Nos documentos curriculares oficiais, como por exemplo, nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998, p. 51), encontramos referência à importância da geometria, em que traz os conceitos geométricos como sendo parte importante no currículo de matemática do Ensino Fundamental, “porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive”.

Outro documento, mais atual, que relata essa importância é a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018 p. 271) quando afirma que “A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento”.

Mesmo a geometria tendo tamanha relevância para o estudo da matemática e para o desenvolvimento humano, através dos seus conteúdos curriculares e das práticas profissionais, seu ensino durante muito tempo foi marcado por dificuldades, tanto no processo de ensino, quanto no processo de aprendizagem.

Durante a década de 90, alguns pesquisadores, como Pavanelo e Lorenzato, desenvolveram pesquisas sobre algumas das causas das dificuldades do ensino da geometria. Pavanelo (1993) concluiu que um dos problemas que o ensino da geometria enfrentava, naquela época, era a má formação dos professores sobre o assunto em tela, que era decorrente do ensino nas licenciaturas.

Já para Lorenzato (1995), além da formação do professor, ele apontava também a abordagem do livro didático, que contribuía para uma “omissão geométrica”, por trazer em seu contexto apenas propriedades, definições e aplicações de fórmulas, tornando assim algo desconexo do cotidiano.

Pesquisas atuais ainda apontam que existe um abandono ou “omissão geométrica” em nossas escolas, tais como Costa (2016), Costa e Rosa dos Santos (2017a; 2017b; 2018) e Moretti e Hillesheim (2018). Outro fator que deixa evidente as dificuldades do ensino da geometria, atualmente, são os resultados de avaliações em larga escala, como, Sistema de Avaliação da Educação Básica de Pernambuco (SAEPE, 2019), Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB, 2017) e Programa Internacional de Avaliação Comparada (PISA, 2018), que apresentam baixo rendimento em questões que exploram conceitos geométricos.

Diante disso, percebemos que é necessário continuar desenvolvendo pesquisas sobre o ensino da geometria para tentarmos entender essas dificuldades existentes e encontrarmos maneiras para melhor aperfeiçoar o seu ensino.

Como há uma vasta quantidade de conteúdos para serem estudados na geometria, decidimos investigar as relações métricas no triângulo retângulo. Essa escolha se deu pelo fato de termos uma escassez de pesquisas realizadas acerca deste conteúdo. Outro fator que nos fez optar por esse objeto de estudo é por ele possibilitar imbricações entre as unidades temáticas geometria, grandezas e medidas, números e álgebra. Como exemplos podemos citar: proporcionalidade, grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais, coordenadas geográficas, entre outros.

Optamos por desenvolver nossa pesquisa na Instituição livro didático por ele ser, na maioria das vezes, o principal material de apoio do professor no planejamento e execução das suas aulas e o único recurso disponibilizado pela escola para trabalhar com os estudantes. Muitas vezes o professor segue fielmente o que está posto no livro didático adotado em sua escola, seguindo todas as orientações sugeridas por ele e executando todas as atividades propostas. Entendemos que o livro didático é um recurso importante e que se faz necessário um maior cuidado ao fazer a escolha dos que serão adotados, pois, como ele é o material de apoio mais utilizado nas escolas da Educação Básica, se torna assim o principal norteador do ensino.

Como aporte teórico, optamos pela Teoria Antropológica do Didático (TAD), proposta por Chevallard (1999) e seus colaboradores. Uma das coisas que essa teoria nos permite analisar é o livro didático e a prática docente do professor, através dela é possível caracterizar as Praxeologias Matemáticas e as Praxeologias Didáticas. Que por sua vez, são ferramentas metodológicas que nos permite compreender como acontece o ensino e a aprendizagem em determinada Instituição, no nosso caso, na Instituição livro didático.

Dessa forma, nos questionamos como acontece a passagem do saber matemático das relações métricas no triângulo retângulo, da Etapa do Ensino Fundamental para a Etapa do Ensino Médio em coleções de livros didáticos escritos pelos mesmos autores?

Referencial Teórico

Organização Praxeológica

Para Chevallard, toda atividade humana pode ser descrita por uma Organização Praxeológica, que é composta por quatro componentes, Tipos de Tarefas, Técnica, Tecnologia e Teoria. Na TAD os Tipos de Tarefas (T) e as Técnicas (τ) formam o bloco “saber fazer” que é representado por $[T, \tau]$ e está relacionado à prática, já as Tecnologias e Teorias formam o bloco do “saber” representado por $[\theta, \Theta]$ que é associado à razão.

A noção de praxeologia se forma em torno de tipos de tarefas (T) a serem cumpridas por meio de pelo menos uma técnica (τ), que, por sua vez, é explicada e validada por elementos tecnológicos (θ) que são justificados e esclarecidos por uma teoria (Θ) (ROSA DOS SANTOS, 2015, p. 42).

Para Chevallard (1999), a noção de Tipo de Tarefas (T) está em conformidade com o sentido antropológico da teoria, em que supõe a existência de objetos que são precisos, e inclui apenas as ações humanas, ou seja, que não são obtidas diretamente da natureza. A

noção de Tipos de Tarefas está ligada a um objeto claro e exato, na qual, geralmente é expressado a princípio por um verbo de ação mais o complemento da frase, como, por exemplo, “em um triângulo ABC, o cateto \overline{AB} mede 15cm e o \overline{AC} mede 16cm. Determine a medida x da hipotenusa desse triângulo ABC”.

Se pararmos para observar apenas o verbo “determinar”, temos o que Chevallard (1999) nomeia de gênero de tarefas, pois não está explicando o que é para determinar e sim englobando várias possibilidades para este verbo. Tendo isso em vista notamos que para existir um gênero de tarefa, se faz necessário a existência de vários Tipos de Tarefas. Dessa forma, notamos que apesar dos conceitos de Tipo de Tarefas (T) e Tarefa (t), estarem relacionados entre si, eles são distintos. O Tipo de Tarefas pode ser definido como um conjunto de tarefas que abrange várias tarefas com propriedade em comum. Quando uma Tarefa (t) faz parte de um Tipo de Tarefas (T), falamos que $t \in T$.

Para resolvermos determinada Tarefa de $t \in T$, devemos elaborar alguns procedimentos, essa maneira ou “caminho” de realizar determinada Tarefa é chamada por Chevallard (1999) de Técnica (τ). Segundo esse autor, uma praxeologia pertencente a um Tipo de Tarefas (T) precisa de uma Técnica (τ) para realizar as Tarefas $t \in T$. Porém, pode acontecer de uma Técnica (τ) não ser suficiente para a realização de todos os Tipos de Tarefas $t \in T$. Portanto, se faz necessário o emprego de mais de uma Técnica, nesse caso, a Técnica pode funcionar para uma parte de $P(\tau)$ dos Tipos de Tarefas (T), mas ser falha em outra.

Quando Chevallard (1999) se refere ao uso da Técnica em uma determinada Instituição (I), ele argumenta que existe um número limitado de Técnicas (τ) institucionalmente reconhecidas, porém, essas mesmas técnicas poderão não ser reconhecidas em outra instituição. Todas as técnicas que forem usadas para realizar as Tarefas $t \in T$, precisam ser justificadas através de um discurso lógico e coerente, dando origem a noção de Tecnologia (θ).

Chevallard (1999) define Tecnologia (θ) como sendo um discurso racional sobre as Técnicas, ele ainda destaca três funções para a Tecnologia. A primeira função é justificar racionalmente a Técnica (τ), de forma que ela seja realizada assegurando bem a Tarefa do tipo (t). A segunda função é explicar, tornar inteligível e esclarecer o motivo da Técnica funcionar na realização de determinada Tarefa. Já a terceira função da Tecnologia é a produção de novas Técnicas, em que possam ser mais eficientes e adaptáveis para a realização de certa Tarefa.

Para Chevallard (1999), a Teoria (Θ) é a justificativa e esclarecimento da Tecnologia. Nela existe um nível superior de justificação-explicação-produção, na qual irá exercer com a Tecnologia a mesma função que a exercida da Tecnologia com a Técnica. Esse autor explica que não existe necessidade de se justificar a Teoria, como foi feito com os demais elementos da Organização Praxeológica.

Especificando nossa pesquisa, vamos nos aprofundar nas praxeologias relativas ao saber matemático. Sobre o estudo e análise de um tema matemático, Chevallard (1999) faz a distinção entre duas praxeologias. A Praxeologia ou Organização Matemática se refere ao estudo e análise da realidade matemática construída para sala de aula. Já a Praxeologia ou Organização Didática demonstra como se pode construir esta realidade matemática, como veremos a seguir.

Praxeologia ou Organização Matemática

A Praxeologia Matemática se refere ao estudo e análise da realidade matemática, através dos Tipos de Tarefas (T), que serão realizadas por meio de Técnicas (τ), justificadas pela Tecnologia (θ) e validadas pela Teoria (Θ).

De acordo com Chevallard (1997) as Praxeologias Matemáticas envelhecem, ou seja, em um certo período da Instituição algumas Técnicas se destacam e são importantes, em outros momentos perdem sua importância, tornando-se ultrapassadas com o surgimento de Técnicas novas para resolver determinados Tipos de Tarefas.

Para Chevallard (1997), o primeiro objetivo a ser traçado pelo pesquisador é determinar e caracterizar as Praxeologias Matemáticas a serem estudadas a partir dos documentos oficiais vigentes e dos livros didáticos adotados. Essa análise deve ser realizada de forma precisa, na busca de descrever e analisar de forma minuciosa os Tipos de Tarefas propostas e as condições de desenvolvimento concedidas aos demais elementos da Praxeologia (Técnica, Tecnologia e Teoria).

Chevallard fala ainda de um outro tipo de análise das Praxeologias Matemáticas, a qual ele se refere: a análise da dinâmica institucional. Segundo o autor, essa análise está representada nas condições de gênese e no desenvolvimento de uma Praxeologia Matemática em uma determinada instituição, que pode ser descrita em prático, técnico, tecnológico e teórico, porém essa praxeologia é suficiente apenas inicialmente para modelar a atividade matemática institucional, tornando-se um dos postulados da TAD que deve ser testado empiricamente.

A TAD postula que toda atividade matemática institucional pode ser moldada por meio da noção da Praxeologia Matemática, isto é, que toda atividade matemática institucional pode ser analisada em termos de Praxeologia Matemática de Complexidade Crescente (CHEVALLARD, 1999). Esse autor traz diferentes praxeologias que são utilizadas para deixar mais fácil a análise desse processo didático observando essas Praxeologias Matemáticas, que estão organizadas em: Praxeologia Matemática Pontual (PMP), Praxeologia Matemática Local (PML), Praxeologia Matemática Regional (PMR) e Praxeologia Matemática Global (PMG).

Em nosso trabalho fizemos a análise das Praxeologias Matemáticas Pontuais, observando-as como foram abordadas no estudo das relações métricas no triângulo retângulo em livros didáticos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. No próximo subtópico veremos como se comporta a Praxeologia Didática.

Praxeologia ou Organização Didática

Segundo Farias (2008), as Praxeologias Didáticas estão ligadas as possibilidades de ações, ou seja, as várias maneiras de organizar o processo de ensino e de aprendizagem da matemática em uma instituição concreta. Dessa forma entendemos que elas não estão restritas apenas ao trabalho do professor em sala de aula, mas se estende ao livro didático e a todos os sujeitos que transformam o 'saber científico' em 'saber ensinado'.

Em suma, a Praxeologia Didática está associada a maneira pela qual podemos ver a realidade matemática a ser estudada, ela nos permite identificar as escolhas didáticas feitas pelo professor ou pelo autor do livro didático ao abordar determinado conteúdo matemático, por exemplo.

A Praxeologia Didática está organizada em seis momentos didáticos ou de estudos, que são eles: 'primeiro encontro', 'exploração do Tipo de Tarefas e da elaboração da Técnica',

'constituição do ambiente tecnológico-teórico', 'trabalho da Técnica', 'institucionalização' e 'avaliação'. É importante ressaltar que esses momentos não definem uma ordem cronológica.

Assim como a Praxeologia Matemática, a Praxeologia Didática apresenta os dois blocos praxeológicos, o bloco do 'saber-fazer' e o do 'saber', que formam a quádrupla $[T, \tau, \theta, \Theta]$. Porém essas duas praxeologias se diferenciam, enquanto a Praxeologia Matemática estuda a realidade matemática que pode ser construída para ser desenvolvida em sala de aula, a Praxeologia Didática refere-se ao modo de como será feito esse estudo.

Os seis momentos didáticos nos permitem evidenciar o desenvolvimento da Praxeologia Didática que tem por objetivo o ensino de determinado saber, no nosso caso, o das relações métricas no triângulo retângulo. Segundo Chevallard (1999), essa Praxeologia é de fundamental importância para o professor, por ser um instrumento de análise dos processos didáticos que foram apresentados no desenvolvimento da Praxeologia Matemática e por permitir identificar os problemas que deverão ser usados nos diferentes momentos de estudos.

Metodologia

Nessa pesquisa adotamos uma abordagem qualitativa, na qual vamos analisar a relação entre as Praxeologias Matemática e Didática na abordagem em livros didáticos de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, acerca das relações métricas no triângulo retângulo, que foram escritos pelos mesmos autores,

Quando nos referimos a uma abordagem qualitativa, concordamos com Prodanov e Freitas (2013, p. 70) que diz que esse tipo de abordagem "considera que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números".

Tendo isso em vista, podemos notar que essa abordagem tende a contribuir com nossa pesquisa, visto que Chevallard aborda na Teoria Antropológica do Didático, o estudo do homem diante do saber matemático e as condições que favorecem uma determinada atividade matemática que possa se desenvolver em uma determinada instituição.

Procedimentos Metodológicos

No primeiro momento identificamos as coleções de livro didático de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio que foram escritas pelos mesmos autores, feito isso, consultamos os documentos oficiais do ensino básico para localizar em que ano ou anos são estudadas as relações métricas no triângulo retângulo e as competências e habilidades que são trabalhadas. Em seguida, continuamos a nossa pesquisa a partir das análises das Praxeologias Matemáticas e Didáticas, essas análises seguiram o padrão proposto por Bittar (2017), que apresentaremos a seguir.

Parte Curso e Parte Atividades Propostas para Análise

Em nossa análise dos livros didáticos, seguimos os critérios de (BITTAR 2017), dividimos seu texto em duas partes: Curso e Atividades Propostas, em que a parte Curso traz definições, propriedades, resultados e exercícios resolvidos. É essa parte que nos possibilita identificar alguns Tipos de Tarefas que os autores propõem e o que consideram importante para o aprendizado do estudante, na Instituição livro didático. É nessa primeira análise que iniciamos

a identificação do conjunto de Tarefas e reorganizamos em Tipos de Tarefas suficientemente próximas. A partir da análise da parte Curso, produzimos os blocos praxeológicos que foram testados ao investigar a parte Atividades Propostas (BITTAR, 2017).

Após a realização da análise da Parte Curso, passamos para a análise das Atividades Propostas. De acordo com Bittar (2017, p. 373), “é nesse momento que devemos buscar analisar cada atividade, qual é a tarefa do estudante e qual é a técnica que se espera que ele utilize para a resolução da tarefa”. Mas para isso, devemos entender como o autor do livro didático espera que os estudantes resolvam as Tarefas produzidas por ele. Uma maneira de entender isso foi retornando a parte Curso e verificando as praxeologias existentes, e uma outra maneira foi nos basear no Manual do Professor, ele nos permitiu entender melhor como o autor fez essas abordagens das Atividades Propostas.

Elaboração do Quarteto Praxeológico Matemático

Nesta etapa, foi realizada uma leitura minuciosa, página a página, do capítulo referente as relações métricas no triângulo retângulo de cada livro. Identificar os blocos “prático-técnico” e “teórico-tecnológico”. Utilizamos para isso, o que construímos na parte Curso e Atividades propostas.

Para a análise praxeológica do saber matemático nas relações métricas no triângulo retângulo, acerca da avaliação dos blocos “prático-técnico” e “teórico-tecnológico”, utilizamos os critérios que foram adotados por Rosa dos Santos (2015) em sua tese e que estão fundamentados nos critérios de Chevallard (1999) como mostra o quadro a seguir:

Quadro 1 – Critérios adotados na análise da Praxeologia Matemática

Elemento da praxeologia	Critérios adotados
Tipo de tarefa (T)	Identificação. Representatividade. Razão de ser. Importância. Pertinência.
Técnica (τ)	Fáceis de utilização. Confiáveis e aceitáveis. Abrangentes. Possíveis de evoluir. Bem elaboradas.
Tecnologia e Teoria [θ , Θ]	Explicitação do conceito. Apresentação e justificativa do enunciado. Tipo de justificativa: canônica ou não. Forma de justificativa: explicativa, dedutiva, etc. Validade de argumentação. Exploração do bloco tecnológico-teórico.

Fonte: Autoria própria (adaptado de ROSA DOS SANTOS, 2015, p. 101)

Elaboração da Praxeologia Didática

Nesta fase, fizemos a análise das escolhas didáticas dos autores de como ensinar as relações métricas no triângulo retângulo, para isso utilizamos os seis momentos de estudo descritos por Chevallard (1999), adaptados por Rosa dos Santos (2015) e ilustrados no quadro a seguir.

Quadro 2 – Descrição dos momentos e critério de análise da Praxeologia Didática

Momentos	Critério de análise
Primeiro encontro	Como se inicia o assunto de relações métricas no triângulo retângulo?
Exploração do Tipo de Tarefas e de elaboração de uma Técnica	Como se dá a exploração do Tipo de Tarefas? Como é feita a elaboração da Técnica?
Constituição do ambiente tecnológico-teórico	Como é realizada a construção das justificativas referente a Técnica?
Trabalho da Técnica	Quando acontece a construção do seu domínio? Da precisão? Há criação de novas Técnicas?
Institucionalização	Como se concretiza o momento de institucionalização?
Avaliação	Como acontece a avaliação das relações pessoais e institucionais?

FONTE: Autoria própria (adaptado de ROSA DOS SANTOS, 2015, p. 101)

Ao identificarmos e analisarmos esses momentos, temos a possibilidade de entender como é feita a abordagem dos saberes matemáticos propostos pelo autor do livro didático.

Análise das Praxeologias Modeladas

Nesta última fase, após a elaboração das Praxeologias Matemáticas e Didáticas dos livros didáticos, fizemos a interpretação dos dados obtidos em cada fase. Assim, podemos descrever a abordagem dos autores dos livros didáticos analisados sobre o saber matemático nas relações métricas no triângulo retângulo. Por fim, fizemos uma comparação entre os dados produzidos com os livros didáticos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, a fim de identificarmos como acontece a passagem desse saber matemático da Etapa do Ensino Fundamental para a Etapa do Ensino Médio.

Análises dos Livros Didáticos

Análise das Praxeologias Matemáticas dos Livros Didáticos

Decidimos fazer nossa análise organizando os livros didáticos a serem analisados em três tópicos. No primeiro tópico apresentamos a análise dos dois livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental, no segundo tópico apresentamos os dados produzidos através da análise dos outros dois livros didáticos de matemática do Ensino Médio e no terceiro tópico mostramos como acontece a passagem das relações métricas no triângulo retângulo da etapa do Ensino Fundamental para a etapa do Ensino Médio.

Acreditamos que ao organizar desta forma, deixamos nossa pesquisa mais clara para a compreensão do leitor e evitamos também a repetição desnecessária da análise dos Tipos de Tarefas e Técnicas comuns entre os dois livros didáticos.

É importante ressaltar que não tivemos um modelo a priori para nos basearmos na identificação dos Tipos de Tarefas referentes as relações métricas no triângulo retângulo, pois em nossa revisão de literatura não encontramos pesquisas anteriores que tivessem esse modelo. As autoras: Souza, Prado, Silva e Espíndola (2016), publicaram um artigo sobre as relações métricas no triângulo retângulo em que a TAD é utilizada como ferramenta metodológica. Elas fazem uma análise do bloco “prático-técnico” e identificam um único Tipo de Tarefas que foi “Calcular a medida de um segmento do triângulo retângulo por meio das relações métricas”.

Como em nossa pesquisa elaboramos o quarteto praxeológico matemático, decidimos não tomar como modelo a pesquisa citada no parágrafo acima, por ela não nos dar suporte suficiente na elaboração da Praxeologia Matemática e por acreditarmos que um único Tipo de Tarefas não deve ser tido como um modelo a priori.

Portanto, apresentamos a seguir no quadro 3 os Tipos de Tarefas encontrados por nós nessa pesquisa, para analisar as relações métricas no triângulo retângulo, esse filtro foi produzido a partir da caracterização praxeológicas identificadas nos livros didáticos que fizeram parte da nossa análise nesta pesquisa.

Quadro 3 – Filtro dos Tipos de Tarefas para análise das relações métricas no triângulo retângulo

Tipos de Tarefas
TC – Calcular a medida de um segmento do triângulo retângulo por meio das relações métricas
TD – Determinar o valor de uma medida de grandeza, em problema cujo enunciado comporta dados relativos as relações métricas no triângulo retângulo
TI – Identificar os catetos e/ou a hipotenusa de um triângulo retângulo
TT – Classificar triângulo retângulo quanto aos ângulos
TV – Verificar as condições de existência das relações métricas no triângulo retângulo

Fonte: Autoria própria

No próximo tópico damos início a nossa análise das Praxeologias Matemática dos livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental.

Análise das Praxeologias Matemáticas dos Livros Didáticos do Ensino Fundamental

Nossa análise das Praxeologias Matemáticas dos livros didáticos do Ensino Fundamental foi produzida a partir da unidade 6 do “LD₁ – Matemática Realidade & Tecnologia” e do capítulo 6 do “LD₂ – Teláris Matemática”, por serem eles que abordam o ensino das relações métricas no triângulo retângulo.

Identificamos no primeiro livro 38 Tarefas, já no segundo livro temos uma quantidade bem maior que no primeiro, foram identificadas 77 Tarefas, todas sobre o saber matemático

do nosso estudo. Apresentaremos a seguir uma tabela com os Tipos de Tarefas identificados nesses livros, e respectivamente a quantidade em que elas aparecem.

Tabela 1 – Tipos de Tarefas das relações métricas no triângulo retângulo dos LD do EF

	Tipos de tarefas	LD1	LD2
TC	Calcular a medida de um segmento do triângulo retângulo por meio das relações métricas	15	47
TD	Determinar o valor de uma medida de grandeza, em problema cujo enunciado comporta dados relativos as relações métricas no triângulo retângulo	11	13
TI	Identificar os catetos e/ou a hipotenusa de um triângulo retângulo	5	-----
TT	Classificar triângulo retângulo quanto aos ângulos	-----	2
TV	Verificar as condições de existência das relações métricas no triângulo retângulo	7	15
Total		38	77

Fonte: Autoria própria

Podemos observar através dos dados apresentados na tabela 1 que nos dois livros o Tipo de Tarefas mais explorado foi o de T_C – “Calcular a medida de um segmento do triângulo retângulo por meio das relações métricas”, correspondendo a aproximadamente 39,4% e de 61% das tarefas identificadas no LD₁ e no LD₂, respectivamente.

Como segundo Tipo de Tarefas mais frequente, temos T_D – “Determinar o valor de uma medida de grandeza, em problema cujo enunciado comporta dados relativos as relações métricas no triângulo retângulo” no LD₁ e T_V – “Verificar as condições de existência das relações métricas no triângulo retângulo” no LD₂.

Sobre o Tipo de Tarefas T_I – “Identificar os catetos e/ou a hipotenusa de um triângulo retângulo”, como podemos ver na tabela 01, esse Tipo de Tarefas é explorado apenas pelo autor do LD₁. Em contrapartida o Tipo de Tarefas T_T – “Classificar triângulo quanto aos ângulos” é explorado apenas no LD₂.

Ainda sobre os Tipos de Tarefas identificados nesses livros didáticos, podemos notar que o Tipo de Tarefas menos explorado no LD₁ é T_I – “Identificar os catetos e/ou a hipotenusa de um triângulo retângulo”, com apenas cinco tarefas, já no LD₂ o Tipo de Tarefas foi o T_T – “Classificar triângulo retângulo quanto aos ângulos”, com duas tarefas apenas.

Análise das Praxeologias Matemáticas dos Livros Didáticos do Ensino Médio

As análises das Praxeologias Matemáticas dos livros didáticos do Ensino Médio foram produzidas a partir do capítulo 9 do “LD₃ – #Contato Matemática” e da unidade 4, capítulo 8 do “LD₄ – Matemática Contexto & Aplicações”, por serem eles que abordam o ensino das relações métricas no triângulo retângulo. No LD₃ identificamos 09 Tarefas, já no LD₄ foram identificadas 10 Tarefas, todas referentes ao ‘saber matemático’ do nosso estudo. Na tabela a seguir estão os Tipos de Tarefas identificados nesses livros e a quantidade de vezes que aparecem.

Tabela 2 – Tipos de Tarefas das relações métricas no triângulo retângulo dos LD do EM

	Tipos de Tarefas	LD3	LD4
TC	Calcular a medida de um segmento do triângulo retângulo por meio das relações métricas	06	10
TD	Determinar o valor de uma medida de grandeza, em problema cujo enunciado comporta dados relativos as relações métricas no triângulo retângulo	01	-----
TI	Identificar os catetos e/ou a hipotenusa de um triângulo retângulo	01	-----
TV	Verificar as condições de existência das relações métricas no triângulo retângulo	01	-----
	Total	09	10

Fonte: Autoria própria

Observando os dados apresentados na tabela 4, podemos notar que nos dois livros o Tipo de Tarefas mais recorrente é o de T_C – “Calcular a medida de um segmento do triângulo retângulo por meio das relações métricas”, correspondendo a aproximadamente 66,6% e de 100% das tarefas identificadas no LD₃ e no LD₄, respectivamente. Sendo no LD₄ o único Tipo de Tarefas explorado pelo autor acerca das relações métricas no triângulo retângulo.

Observando ainda a tabela 4, podemos notar que o autor do LD₃ explora mais três Tipos de Tarefas: T_D – “Determinar o valor de uma medida de grandeza, em problema cujo enunciado comporta dados relativos as relações métricas no triângulo retângulo”, T_I – “Identificar os catetos e/ou a hipotenusa de um triângulo retângulo” e T_V – “Verificar as condições de existência das relações métricas no triângulo retângulo”.

Passagem das Relações Métricas no Triângulo Retângulo da Etapa do Ensino Fundamental para a Etapa do Ensino Médio

Como falamos anteriormente em nossa pesquisa, queremos entender como acontece a passagem do ensino das relações métricas no triângulo retângulo da etapa do Ensino Fundamental para a etapa do Ensino Médio. Para conseguirmos entender isso, vamos comparar as análises das Praxeologias Matemáticas e Didáticas dos livros didáticos escritos pelos mesmos autores que descrevemos nos tópicos anteriores.

Livros Didáticos de Joamir Souza

Primeiro observamos como aconteceu essa passagem do ensino das relações métricas no triângulo retângulo nos livros didáticos do autor Joamir Souza. No livro didático ‘Matemática Realidade & Tecnologia’ do Ensino Fundamental (LD₁) e no livro didático ‘#Contato Matemática’ do Ensino Médio (LD₃), lembrando que esse livro didático do Ensino Médio teve a colaboração de Jacqueline Garcia.

Esse autor explora um total de 47 Tarefas, sendo 38 no LD₁ e 09 no LD₃. Podemos classificá-las em quatro Tipos de Tarefas, são eles: T_C – Calcular a medida de um segmento do triângulo retângulo por meio das relações métricas, T_D – Determinar o valor de uma medida de grandeza, em problemas cujo enunciado comporte dados relativos as relações métricas no triângulo retângulo, T_I – Identificar os catetos e/ou a hipotenusa de um triângulo retângulo e T_V – Verificar as condições de existência das relações métricas no triângulo retângulo. É importante ressaltar que nos dois livros ele explora os mesmos Tipos de Tarefas.

Sobre as Técnicas utilizadas por ele, nos dois livros a mais usada é o Teorema de Pitágoras, sendo ela a única que aparece no LD₃. Percebemos também que as Técnicas $t_7 - ch=bn$ e $t_6 - bh=cm$ que apareceram no momento da 'institucionalização da Técnica' não foram exploradas nos Tipos de Tarefas.

O 'ambiente tecnológico-teórico' acontece de maneira diferente entre os dois livros. No LD₁ ele ocorre a partir das demonstrações das relações métricas no triângulo retângulo por meio da semelhança de triângulos. Porém mesmo o LD₃ usando a Técnica do Teorema de Pitágoras que está presente no LD₁ esse ambiente é construído de maneira diferente, no LD₃ a demonstração acontece por meio de adição de áreas.

Há uma diferença do 'primeiro momento' do encontro das relações métricas no triângulo retângulo do LD₁ para o LD₃, no primeiro livro esse conteúdo é apresentado pela primeira vez para o estudante, enquanto que no segundo livro esse momento é visto como um (re)encontro. Porém esse encontro e esse (re)encontro acontecem de forma semelhante nos dois livros, em que esse autor traz dentro do 'primeiro momento' outros momentos como a 'apresentação da institucionalização' e o da 'justificativa da Técnica'.

A 'exploração do Tipo de Tarefas' e da 'elaboração da Técnica' acontece de forma semelhante nos dois livros, elas vêm logo após o 'primeiro momento'. A 'exploração do Tipo de Tarefas' é dada por $T_c - \text{Calcular a medida de um segmento do triângulo retângulo por meio das relações métricas}$, em que no LD₁ é apresentado um exemplo resolvido usando as relações métricas no triângulo retângulo e como Técnica para calcular algumas medidas desse triângulo, já no LD₃ a Técnica consiste apenas na utilização do Teorema de Pitágoras.

Sobre a 'avaliação', encontramos apenas no Manual do Professor do LD₁ orientações de como ela deve acontecer. Para Joamir o processo de aprendizagem não deve ser reduzido a avaliação de um único momento e ser atribuído um valor a ele, esse processo deve ser realizado de forma contínua e prolongada em que se deve construir estratégias de avaliação. Ele sugere alguns instrumentos de avaliação como: prova escrita, prova escrita em fases, prova-escrita-com-cola, trabalho em grupo, seminário, portfólio e autoavaliação.

Podemos perceber que Joamir explora nos seus dois livros didáticos a mesma quantidade de Tipos de Tarefas, mesmo a quantidade de tarefas sendo bem menor no LD₃. Porém no LD₃ esse autor não traz nenhuma seção intitulada por relações métricas no triângulo retângulo. O que encontramos foi a relação métrica correspondente ao Teorema de Pitágoras, em uma abordagem com demonstração do teorema por adição de áreas e não pela demonstração de semelhança de triângulos.

Com isso, notamos que esse autor não aborda o ensino das relações métricas no triângulo retângulo no livro didático do Ensino Médio, como está descrito no Currículo de Matemática do Estado de Pernambuco, documento esse que usamos como apoio em nossa pesquisa. Segundo esse documento, as expectativas de aprendizagem indicam que deve-se utilizar a semelhança de triângulos para estabelecer as relações métricas no triângulo retângulo (inclusive o teorema de Pitágoras) e aplicá-las para resolver e elaborar problemas.

Dessa forma, entendemos que a passagem das relações métricas no triângulo retângulo nos livros de Joamir Souza da Etapa do Ensino Fundamental para o Ensino Médio, sofre alterações que contribuem para uma aprendizagem defasada desse saber no Ensino Médio, pois esse autor explora o Teorema de Pitágoras pelo conceito de adição de áreas e não pelas relações métricas no triângulo retângulo.

Livros Didáticos de Dante

Dando continuidade também observamos como aconteceu a passagem das relações métricas no triângulo retângulo do livro didático 'Teláris Matemática' do Ensino Fundamental (LD₂) para o livro 'Matemática Contexto & Aplicações' do Ensino Médio (LD₄), ambos do autor Dante.

Dante explora um total de 87 Tarefas, sendo 77 delas no LD₂ e 10 no LD₄. Essas Tarefas foram classificadas em quatro Tipos de Tarefas, são eles: T_C – *Calcular a medida de um segmento do triângulo retângulo por meio das relações métricas*, T_D – *Determinar o valor de uma medida de grandeza, em problemas cujo enunciado comporte dados relativos as relações métricas no triângulo retângulo*, T_T – *Classificar triângulo quanto aos ângulos* e T_V – *Verificar as condições de existência das relações métricas no triângulo retângulo*.

É importante destacar que no LD₄ o único Tipo de Tarefas explorado por ele nas Tarefas foi "*Calcular a medida de um segmento do triângulo retângulo por meio das relações métricas*".

Observamos que as Técnicas utilizadas por Dante na 'elaboração e no trabalho da Técnica' divergem. Na 'elaboração' ele explora 08 tipos de Técnicas e no 'trabalho da Técnica' apenas 06 tipos, isso acontece nos dois livros. As Técnicas que não apareceram no 'trabalho da Técnica' foram: $t_7 - ch=bn$ e $t_6 - bh=cm$.

Outra coisa que observamos é que nos dois livros a Técnica mais utilizada foi o Teorema de Pitágoras, e que na maioria das Tarefas ele utiliza mais de uma Técnica em sua resolução.

A 'construção do ambiente tecnológico-teórico' acontece de maneira semelhante entre os dois livros. Ele é construído a partir das demonstrações das relações métricas no triângulo retângulo por meio da semelhança de triângulos.

Há uma diferença do 'primeiro momento' do encontro das relações métricas no triângulo retângulo do LD₂ para o LD₄. No primeiro livro esse conteúdo é apresentado pela primeira vez para o estudante, já no segundo livro esse momento é visto como um (re)encontro. Porém esse encontro e esse (re)encontro acontecem de forma distintas. No LD₂ esse autor traz no 'primeiro momento' as relações métricas no triângulo retângulo relacionadas a uma situação que pode ser presenciada na realidade dos estudantes e no LD₄ ele traz dentro do 'primeiro momento' outros dois, o de 'institucionalização' e da 'justificativa da Técnica'.

A 'exploração do Tipo de Tarefas e da elaboração da Técnica' acontece de forma semelhante nos dois livros. O Tipo de Tarefa explorado nesse momento é o T_C – "*Calcular a medida de um segmento do triângulo retângulo por meio das relações métricas*". No LD₂ é apresentado um exemplo resolvido usando o Teorema de Pitágoras como a principal Técnica, no LD₄ é explorado no exercício resolvido algumas das relações métricas como Técnica.

Dante apresenta, nos dois livros analisados, ideias parecidas sobre 'avaliação'. Ele diz que ela deve servir para entender como está acontecendo o processo de ensino-aprendizagem, tanto por parte da equipe escolar como também para cada aluno verificar o seu próprio desempenho. O autor acredita que a 'avaliação' deve ser considerada em seus três aspectos: diagnóstico, formativo e certificativo. Quanto aos instrumentos de avaliação ele sugere o uso de: observação e registro, provas, testes, trabalhos, entrevistas, conversas informais e autoavaliação. Todos visando entender os aspectos matemáticos.

Como podemos observar, Dante aborda o ensino das relações métricas no triângulo retângulo de forma semelhante nos dois livros didáticos, principalmente na 'institucionalização do saber', na 'elaboração da Técnica' e na 'construção do ambiente tecnológico-teórico'. Porém quando olhamos para os Tipos de Tarefas presentes nos dois

livros, percebemos que no LD₄ apenas o Tipo de Tarefas T_C é explorado nas atividades propostas.

Por mais que as abordagens do ensino das relações métricas no triângulo retângulo se assemelhem nos livros didáticos de Dante, podemos perceber que quando esse 'saber' parte da Etapa do Ensino Fundamental para o Ensino Médio algumas coisas simplesmente são ignoradas. Como é o caso dos Tipos de Tarefas, em que no LD₄ o autor prioriza apenas o cálculo das relações métricas. Nessa Etapa também não existe mais a mesma preocupação em relacionar esse 'saber' com situações do cotidiano do estudante.

Portanto, entendemos que a passagem da Etapa do Ensino Fundamental para a Etapa do Ensino Médio sofre algumas mudanças, sendo deixadas de lado alguns Tipos de Tarefas que ajudariam o estudante a ter uma aprendizagem mais completa sobre as relações métricas no triângulo retângulo. Isso também acontece quando esse autor deixa de relacionar esse 'saber' com situações do mundo físico. Acreditamos que, quando essa assimilação é posta para o estudante facilita o entendimento e conseqüentemente auxilia o estudante a construir as competências e habilidades sobre o 'saber' a ser estudado.

Considerações Finais

Ao iniciar nossa pesquisa tínhamos o propósito de tentar entender o que acontece no ensino da geometria, que mesmo tendo tamanha relevância para o estudo da matemática e desenvolvimento humano, através dos seus conteúdos curriculares e das práticas profissionais, o seu ensino desde muito tempo é marcado por dificuldades, tanto no processo de ensino, como de aprendizagem.

Após serem realizadas várias pesquisas que levaram a essas conclusões apresentadas, houve uma tentativa de resolver esses problemas. Passou a se ter mais investimentos na formação inicial do professor, como também em formação continuada, e uma reformulação nos livros didáticos de matemática a partir da implantação do Programa Nacional do Livro Didático – PNLD, que passou a organizar o ensino dos conteúdos da geometria de maneira que eles não fossem estudados apenas nos últimos capítulos do livro e sim ao longo de todos eles, fazendo conexões com os conteúdos dos outros campos da matemática, como por exemplo o da álgebra e das grandezas e medidas.

Para nos ajudar a responder nosso problema de pesquisa utilizamos como aporte metodológico a Teoria Antropológica do Didático – TAD, proposta por Chevallard (1999). Essa teoria foi escolhida por nós, por acreditarmos que ela tem elementos que nos possibilita analisar de forma mais precisa como acontece o ensino das relações métricas no triângulo retângulo em coleções de livros didáticos. Através da teoria analisamos as Praxeologias Didáticas, tal análise nos permitiu entender de forma mais clara como aconteceu a escolha didática dos autores e as Praxeologias Matemáticas, analisando os procedimentos por eles utilizados no ensino das relações métricas no triângulo retângulo.

Em nossas análises observamos que os autores dos livros analisados têm uma abordagem semelhante sobre as relações métricas no triângulo retângulo, mas divergem em algumas escolhas didáticas, principalmente nos livros didáticos do Ensino Fundamental. Joamir Souza explora o ensino das relações métricas no triângulo retângulo de forma desconexa do mundo físico, em que na maioria das situações expostas por ele o 'saber' é ensinado de forma tradicional e tecnicista, em que o estudante é posto apenas como um

reprodutor de conceitos matemáticos e de fórmulas, principalmente nas tarefas pertencentes aos Tipos de Tarefas T_C e T_D .

Já Dante nos permite encontrar sentido no 'saber', quando ele relaciona os conteúdos a serem ensinados com situações que fazem parte do mundo físico e que podem ser perceptíveis pelos estudantes. Entretanto, quando fizemos a análise das Praxeologias Matemáticas percebemos que ele deixa transparecer que o ensino se efetiva mediante a repetição exagerada nas resoluções de Tarefas, tornando o ensino desse saber mecânico.

Acreditamos que as abordagens que foram desenvolvidas por esses autores nos livros didáticos que analisamos estão contribuindo para que o ensino das relações métricas no triângulo retângulo e conseqüentemente da geometria continuem passando por dificuldades e sendo esse um dos fatores para que não avancemos no ensino e aprendizagem da geometria.

Portanto, sugerimos que os professores ao fazerem a escolha dos livros didáticos tentem observar como acontece as escolhas didáticas dos autores. É importante ressaltar que o livro didático não seja o único material de apoio para o professor usar em seus planejamentos, ele deve buscar se reinventar e apresentar propostas didáticas que desperte a atenção e curiosidade do estudante.

Para concluir, acreditamos que essa pesquisa utilizando a Teoria Antropológica do Didático, como referencial metodológico, reforça o que já falamos anteriormente sobre a sua importância para nossas análises do ensino das relações métricas no triângulo retângulo. A análise das Praxeologias Matemáticas e Didáticas nos permitiu ter uma visão detalhada das praxeologias propostas pelos autores dos livros didáticos adotados em nossa pesquisa, o que nos possibilitou responder nosso problema de pesquisa e alcançar os objetivos que traçamos. Além disso, o desenvolvimento dessa pesquisa favoreceu nosso desenvolvimento enquanto professores e pesquisadores, que estamos sempre em processo de evolução.

Referências

ALMOULOUD, S. A. Teoria Antropológica do Didático: metodologia de análise de materiais didáticos. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**. n. 42, p. 09-34, 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. **Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação**. Brasília, DF: FNDE, 2020. Disponível em: <https://www.fnde.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/pnld/dados-estatisticos>. Acesso em: 28 jan. 2021.

BRASIL. Diretoria de Avaliação da Educação Básica. **Relatório Brasil no PISA 2018**. Brasília: INEP, 2018.

BRASIL. Diretoria de Avaliação da Educação Básica. **Sistema de Avaliação da Educação Básica: Matemática**. Brasília: INEP, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2015. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documento/BNCCAPRESENTACAO.pdf>. Acesso em: 20 jul. 2019.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**/ Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/ SEF, 1998.

- CHAACHOUA, H; BITTAR, M. A teoria antropológica do didático: paradigmas, avanços e perspectivas. **Caminhos da educação matemática em revista (on-line)**, v. 9, p. 1-16, 2019.
- CHEVALLARD, Y. Analyse des pratiques enseignantes ET didactique des mathématiques: l'approche anthropologique. In: **Recherches en didactique des mathématiques**, Grenoble, Éditions La Pensée Sauvage, v.19.2, n.56, p.221-265, 1999.
- CHEVALLARD, Y. Familère et problématique, la figure du professeur. In: **Recherches en didactique de Mathématiques**, 1997, p. 17-54.
- CHEVALLARD, Y. **Organizer L'étude. 3. Ecologie & regulation**. Actes de la 11 École d'Été de Didactique des Mathématiques. France: La Pensée Sauvage. 2002. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=53. Acesso em janeiro de 2017, com paginação de 1-22.
- CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: L'approche anthropologique. **Actes de l'U.E. de la Rochelle**, 1998.
- COSTA, A. P. **A construção do conceito de quadriláteros notáveis no 6º ano do ensino fundamental: um estudo sob a luz da teoria vanhieliana**. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2016.
- COSTA, A. P.; ROSA DOS SANTOS, M. O pensamento geométrico de professores de Matemática em formação inicial. **EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA-RS**, v. 2, p. 1-20, 2017.
- COSTA, A. P.; ROSA DOS SANTOS, M. Os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de estudantes de uma Licenciatura em Matemática no Estado de Pernambuco: um estudo sob a ótica da teoria de Van-Hiele. **EDUCAÇÃO ON-LINE (PUCRJ)**, v. 25, p. 63- 86, 2017.
- COSTA, A. P.; ROSA DOS SANTOS, M. Os quadriláteros notáveis no 8º ano do Ensino Fundamental: um estudo sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático. **Revista de Educação Matemática**, v. 15, p. 353-372, 2018.
- COSTA, A. P.; ROSA DOS SANTOS, M. Uma análise praxeológica do ensino de triângulos no 8º ano do ensino fundamental. **Educação Matemática em Revista**, v. 2, p. 189-197, 2018.
- DANTE, L. R. **Matemática Contexto & Aplicações** (1º ano do EM). 3. ed. São Paulo: Editora Ática, 2016.
- DANTE, L. R. **Teláris Matemática** (9º ano do EF). 3. ed. São Paulo: Editora Ática, 2018.
- LIMA, P. F.; CARVALHO, J. B. P. F. Geometria. In: **Coleção Explorando o Ensino**. Brasil. Matemática: ensino fundamental. Coordenação João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho, Brasília: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, volume 17, 2010, p. 135 – 166.
- LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? **A Educação Matemática em Revista – SBEM** – nº 4, p. 3 – 13, 1995.
- MORETTI, Mércles T.; HILLESHEIM, Selma F. Linguagem natural e formal na semiosfera da aprendizagem matemática: o caso da geometria para a formação do pedagogo. **Em teia - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 9, p. 1-19, 2018.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Revista Zetetiké**, n. 1, p. 7 – 17, 1993.

PERNAMBUCO. Secretaria Estadual de Educação. **Sistema de Avaliação da Educação Básica de Pernambuco– SAEPE: Matemática**. Recife: Revista da Gestão Escolar, 2019.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. **Metodologia do Trabalho Científico: Métodos e Técnicas da Pesquisa e do Trabalho Acadêmico**, 2ª Ed., Novo Hamburgo - RS, Associação Pró-Ensino Superior em Novo Hamburgo - ASPEUR Universidade Feevale, 2013.

ROSA DOS SANTOS, M. **A transposição didática do conceito de área de figuras planas no 6º ano do ensino fundamental**: um olhar sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático. 2015. 281f. Tese (Doutorado em Ensino das Ciências e Matemática) – Departamento de Educação. Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife.

SOUZA, J. R. **Matemática Realidade & Tecnologia** (9º ano do EF). 1. ed. São Paulo: FTD, 2018.

SOUZA, J. R.; GARCIA, J. S. R. **Matemática Realidade & Tecnologia** (1º ano do EM). 1. ed. São Paulo: FTD, 2018.