ISSN (versão *online*): 2317-5125
Amazônia — Revista de Educação em Ciências e Matemáticas

Teorema Fundamental do Cálculo: uma análise epistemológica

Fundamental Theorem of Calculus: an epistemological analysis

Patrícia Benevides de Oliveira[1]
Franck Gilbert René Bellemain[2]

Resumo

Neste artigo, apresentamos uma análise epistemológica com base em uma revisão de literatura acerca do desenvolvimento do Teorema Fundamental do Cálculo ao longo do tempo, através da resolução de problemas pelos matemáticos desde a Antiguidade. Concluímos que, a relação entre o acúmulo de uma quantidade (determinação de área) e a taxa de variação de seu acúmulo (determinação da tangente), que culminou no teorema fundamental, é um dos marcos principais no desenvolvimento do Cálculo. Essas duas classes de problemas, conhecidas hoje como integração e derivação, foram concebidas separadamente, cada uma com técnicas limitadas ao tipo de problema abordado, o que acabou influenciando o ensino do Cálculo como conhecemos hoje.

Palavras chave: História do cálculo; teorema fundamental do cálculo; derivação; integração.

Abstract

In this article, we present an epistemological analysis based on a literature review about the development of the Fundamental Theorem of Calculus over time, through problem solving by mathematicians since Antiquity. We conclude that the relationship between the accumulation of a quantity (determination of area) and the rate of change of its accumulation (determination of the tangent), which culminated in the fundamental theorem, is one of the main milestones in the development of Calculus. These two classes of problems, known today as integration and derivation, were conceived separately, each one with techniques limited to the type of problem addressed, which ended up influencing the teaching of Calculus as we know it today.

Keywords: History of calculus; fundamental theorem of calculus; derivation; integration.

[1] Universidade Federal de Pernambuco | pattybenevides@gmail.com
[2] Universidade Federal de Pernambuco | f.bellemain@gmail.com

Introdução

Reconhecemos que o Cálculo Diferencial e Integral ocupa um lugar de destaque entre as disciplinas de Matemática do ensino superior devido às extensas contribuições e aplicações em diversas áreas do conhecimento. Como dizia Eves (2011, p. 417), os seus principais conceitos "têm tanto alcance e tantas implicações no mundo moderno que talvez seja correto dizer que sem algum conhecimento deles dificilmente hoje uma pessoa poderia considerar-se culta".

Essas contribuições atribuídas ao Cálculo se devem ao empenho dos matemáticos em resolver problemas de diversas naturezas, desenvolvendo e aperfeiçoando cada vez mais os métodos de resolução. Por meio da evolução histórica, observamos como as ideias surgiram, como a sociedade foi se desenvolvendo e como os conceitos matemáticos foram se originando e sendo transformados e utilizados.

Ao longo do tempo, dois problemas particulares permearam os pensamentos de vários filósofos e matemáticos: um deles foi a quadratura (processo de determinar áreas) e, o outro, o traçado de tangentes a curvas. Eles originaram os processos que conhecemos hoje como integração e derivação que, não aparentemente, são inversos um do outro, sendo que essa relação se estabelece com o Teorema Fundamental do Cálculo.

Nesse contexto, realizamos uma análise epistemológica, buscando aspectos relativos à transposição desse saber, como ele foi produzido e passou a ser ensinado.

Da Grécia Antiga ao Século XVII

O estudo do Cálculo nos tempos atuais é resultado de um longo processo histórico que perdurou por vários séculos, desde quando os antigos gregos buscavam resolver questões relacionadas com o cálculo de áreas.

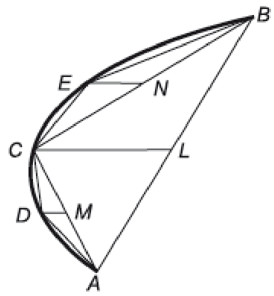
Na Grécia Antiga, o filósofo Zenão de Eleia (c. 450 a.C.) em seus paradoxos, já propunha a questão da continuidade e infinitésimos em oposição aos discretos e finitos, que mais tarde culminou no estudo dos limites.

O sofista Antífon (c. 430 a.C.) deu grande contribuição ao problema da quadratura do círculo, antecipando a ideia de que, duplicando sucessivamente a quantidade de lados de um polígono regular inscrito num círculo, a diferença entre o círculo e o polígono finalmente se exauria, originando assim a ideia do método de exaustão de Eudoxo (c. 370 a.C.), com a seguinte proposição:

> Se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie. (EVES, 2011, p. 419).

Eudoxo resolveu os problemas de incomensurabilidade que outros matemáticos não haviam resolvido em sua época. Um dos problemas era inscrever e circunscrever figuras retilíneas dentro e por fora da figura curva, e ir multiplicando-se indefinidamente o número de lados, mas não sabiam como concluir, pois não conheciam o conceito de limite. Segundo Arquimedes, foi Eudoxo quem forneceu o axioma que hoje tem o nome de Arquimedes e que serviu de base para o método de exaustão, o equivalente grego do cálculo integral.

Boyer (1974, p. 68) aponta[3] Eudoxo como o provável originador do cálculo integral, com a maior contribuição à matemática dos membros da Academia Platônica. Um dos exemplos mais antigos de Eudoxo, aplicado por Arquimedes para determinação de áreas, foi da quadratura de um segmento parabólico:

> Sejam C, D, E os pontos do arco de segmento parabólico (ver Figura 97) obtidos traçando-se LC, MD, NE paralelos ao eixo da parábola pelos pontos médios L, M, N de AB, CA, CB. Usando a geometria da parábola, Arquimedes mostrou que
>
> $$\Delta CDA + \Delta CEB = \frac{\Delta ACB}{4}.$$
>
> 
>
>
> Figura 97
>
> Repetindo sucessivamente esse raciocínio conclui-se que a área do segmento parabólico é dada por
>
> $$\begin{aligned}\Delta ABC + \frac{\Delta ABC}{4} + \frac{\Delta ABC}{4^2} + \frac{\Delta ABC}{4^3} + \cdots \\ = \Delta ABC\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots\right) \\ = \frac{4}{3}\Delta ABC\end{aligned}$$
>
> (EVES, 2011, p. 421).

Nessa demonstração foi utilizada a fórmula da soma geométrica, enquanto Arquimedes fazia pelo método de dupla *reductio ad absurdum*[4], quando mostra que a área do segmento parabólico não pode exceder 4/3 da área do primeiro triângulo inscrito e, da mesma forma, que não pode ser nem maior nem menor do que esse valor. Atualmente, para nós, bastaria utilizar o conceito de limite, no entanto, como os matemáticos gregos, e assim como Arquimedes, evitavam o infinito a todo custo, ele conclui então que o resultado da soma dos triângulos deve ser igual a esse número.

Ávila (2009) destaca a preocupação com o rigor e com a estrutura lógica das demonstrações nas obras de Arquimedes (287-212 a.C.), sem dar vestígios dos processos de descoberta, o que era comum entre os gregos. No livro "O Método", descoberto, estudado e codificado pelo professor dinamarquês de filosofia Johan Ludvig Heiberg (1845-1928), Arquimedes descreve um "método mecânico" para investigar questões matemáticas, que ele

[3] Consideração feita a partir da demonstração do teorema que diz que as áreas dos círculos são proporcionais aos quadrados sobre seus diâmetros, como sendo o primeiro teorema preciso relativo a figuras curvilíneas (BOYER, 1974, p.68).

[4] Termo em latim que significa "redução ao absurdo", que consiste em um método de demonstração indireta em que se admite inicialmente a negação de determinada afirmação como verdadeira e, durante o processo de prova, surge como consequência uma contradição que torna um absurdo a negação da hipótese inicial.

encaminhou ao amigo Erastóstenes acompanhado de uma carta que dava indícios da sua utilidade para descobertas matemáticas. Assim destaca a semelhança desse método com o "método dos indivisíveis", criado no século XVII e que originou o Cálculo Diferencial e Integral.

> Essa semelhança entre os dois métodos deixa claro que os matemáticos do século XVII seguiam a mesma trilha de Arquimedes, com a única diferença de que Arquimedes, com ele próprio diz, entendesse claramente que "certas coisas (...) tivessem de ser demonstradas pela Geometria". Mas, enquanto Arquimedes conseguiu suprir essas demonstrações em seu tempo, o mesmo não aconteceu com os matemáticos dos séculos XVII e XVIII, que cuidaram mais em desenvolver as novas técnicas do Cálculo do que em lhes suprir fundamentos lógicos. Mas acertaram muito bem, pois foi esse desenvolvimento que levou a uma grande maturação do Cálculo e acabou por abrir caminho, a partir de fins do século XVIII e início do século XIX, à construção do rigor no Cálculo e nas outras disciplinas matemáticas. (ÁVILA, 2009, p. 100).

Contudo, a abordagem feita no livro "O Método" por meio de fatos geométricos era considerada por Arquimedes apenas como instrumentos de descoberta. Sob o ponto de vista do rigor, demonstrava em seu livro "Sobre a Esfera e o Cilindro" os resultados sobre o volume e a área da esfera através do método de exaustão e o método de dupla redução ao absurdo, já citados anteriormente, e que podemos considerar como os primeiros resultados significativos na resolução do problema da quadratura.

Os matemáticos do Ocidente durante o século XIV tinham interesse por séries infinitas e, embora Arquimedes já tivesse apresentado o cálculo da soma de uma progressão geométrica infinita, assim como os gregos, evitavam o infinito – o chamado *horror infiniti*; enquanto que os filósofos do fim da Idade Média já faziam referência ao infinito. A matemática arquimediana, essencialmente estática, perdurou por vários séculos. Nesse meio tempo, acontecimentos históricos influenciaram sobremaneira o progresso da matemática.

O século XIV enfrentou várias crises, provocando perturbações à inspiração matemática. A Inglaterra e a França foram devastadas pela Guerra dos Cem Anos e pela Guerra das Rosas, conquanto as universidades italianas, alemãs e polonesas durante o século quinze avançaram no desenvolvimento matemático.

Cerca de dezoito séculos depois de Arquimedes, o matemático francês François Viète (1540 – 1603), em seus trabalhos em trigonometria, encontrou uma fórmula notável envolvendo o número π:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \ldots$$

> Em 1593, a descoberta desse produto infinito, escrito pela primeira vez como uma fórmula matemática, foi um marco na história da matemática, permitindo assim a aceitação dos processos infinitos na matemática. (MAOR, 2008, p. 66).

Johannes Kepler (1571 – 1630) foi também um matemático que necessitava dos métodos de Arquimedes, no entanto buscava evitar o rigor do método de exaustão, fazendo uso dos indivisíveis ou quantidades infinitamente pequenas. Segundo Eves (2011, p. 424), ele foi um dos primeiros europeus modernos a desenvolver ideias relativas a infinitésimos recorrendo a procedimentos de integração a fim de calcular as áreas envolvidas em sua segunda lei do movimento planetário e os volumes de que se ocupou em seu tratado sobre a capacidade dos barris de vinho.

Kepler descreve em seu livro *Nova stereometria doliorum vinartorum* (Nova geometria sólida dos barris de vinho, 1615) a aplicação do método dos indivisíveis em três dimensões para encontrar os volumes de sólidos de revolução. De um modo intuitivo para o moderno cálculo integral, ele considerava um sólido como um conjunto de infinitas fatias finas, ou lâminas, e somava seus volumes individuais.

Embora o método dos indivisíveis funcionasse em muitos casos particulares, ainda dependia muito de se encontrar alguma fórmula adequada para o somatório. Como exemplo, para a área da hipérbole $y = \frac{1}{x}$ não existia fórmula para o somatório dos inversos dos inteiros, ou seja, faltava a generalidade e a moderna técnica de integração. Neste caso específico, não era possível obter uma quadratura por meios puramente geométricos com o método da exaustão, mas com a introdução dos processos infinitos esse problema estava próximo da solução, com a invenção da geometria analítica no século XVII.

Não há certezas sobre quem inventou a geometria analítica, mas há de se compreender, segundo Eves (2011, p. 382), que a sua essência reside na transferência de uma investigação geométrica para uma investigação algébrica correspondente, tendo que esperar o desenvolvimento do simbolismo e dos processos algébricos. Assim é que a maioria dos historiadores considera que a origem desse campo da matemática é atribuída aos matemáticos franceses René Descartes e Pierre de Fermat, mas outros matemáticos que o precederam fizeram também contribuições essenciais com o método da quadratura.

Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647), discípulo de Galileu, foi estimulado por ele e por Kepler, a organizar seus infinitésimos no livro *Geometrie indivisibilibus continuorum* (1635), que se baseia na ideia de que "uma área pode ser pensada como sendo formada de segmentos ou "indivisíveis" e que um volume pode ser considerado como composto de áreas que são volumes indivisíveis ou quase-atômicos." (BOYER, 1974, p. 241).

Enquanto Kepler imaginou que uma determinada figura geométrica fosse decomposta em figuras infinitesimais, cujas áreas ou volumes ele somava para obter a área ou o volume da figura fornecida, Cavalieri estabeleceu uma correspondência biunívoca entre os elementos indivisíveis de duas figuras geométricas dadas; se estes elementos correspondentes tivessem uma certa razão (constante), então concluía-se que as áreas ou volumes tinham a mesma razão. Ainda considerava que uma figura geométrica era composta por um número indefinidamente grande de indivisíveis de menor dimensão.

O seu método de comparar duas figuras geométricas, comparando os indivisíveis de um com os indivisíveis de outro, baseia-se no conhecido Teorema de Cavalieri:

> Se dois sólidos têm altitudes iguais e se seções feitas por planos paralelos às bases e a distâncias iguais estão sempre em uma determinada proporção, então os volumes dos sólidos também estão nessa proporção. (BOYER, 1974, p. 242).

A maneira como ele buscou provar esse teorema foi através de superposição, que envolvia mover um dos sólidos, peça por peça, de forma a um sobrepor o outro. Na prática, o teorema oculta o papel dos processos de limite nos cálculos de volume[5], como demonstrado após décadas seguintes pelos matemáticos franceses Fermat, Pascal e Roberval.

A *Geometrica indivisibilibus* de Cavalieri facilitou o problema das quadraturas, enquanto ele trabalhava simultaneamente com geometria analítica e Cálculo antes que qualquer desses assuntos fosse formalmente inventado.

Também aluno de Galileu, o matemático italiano Evangelista Torricelli (1608 – 1647) se interessou pela curva descrita por um ponto em um círculo ao rolar em uma linha tangente a ele, a qual Galileu denominou de cicloide. Juntamente com Pierre de Fermat (1601 – 1665), René Descartes (1596 – 1650) e Gilles Persone de Roberval (1602 – 1675), participavam do "grupo de Mersenne", o frade Minimita, Marin Mersenne (1588 – 1648), que serviu, através de correspondência, como centro de distribuição de informação matemática.

Torricelli publicou na obra *De parabole*, em 1644, a primeira demonstração matemática de que a área delimitada por um arco de curva é exatamente o triplo da área do círculo gerador. Nessa obra ele inclui tanto a quadratura do cicloide quanto a construção da tangente, a qual Roberval o acusou de plágio por ter sido ele quem chegou aos resultados, primeiro. Mas coube a Torricelli a prioridade na publicação, que provavelmente fizeram independentemente, já que Roberval usara o método dos indivisíveis para o problema da área, enquanto Torricelli deu duas quadraturas, uma usando o método dos indivisíveis de Cavallieri e a outra pelo método da exaustão de Arquimedes.

A aplicação dos conceitos da Física (tempo e movimento) ao estudo de curvas levou Torricelli a pelo menos uma compreensão intuitiva da relação inversa entre problemas de tangente e quadratura, ou seja, entre as operações de diferenciação e integração. Neste caso, representando em um gráfico que relaciona velocidade x tempo, o movimento de um ponto ao longo de uma linha reta com uma velocidade variável, tem-se que a distância total percorrida pelo ponto é igual à área sob a curva velocidade.

Como já citado anteriormente, muitos historiadores atribuem a René Descartes (1596 - 1650) a origem da geometria analítica, através da obra "La Géométrie", publicada em 1637, que encerrou a geometria grega clássica, baseada na construção geométrica e prova, tornando-se inseparável da álgebra, e que mais tarde se juntariam ao cálculo.

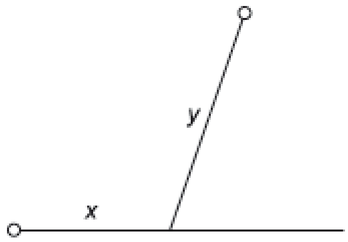
> A ideia inicial de Descartes era descrever cada ponto em um plano através de dois números, suas distâncias a partir de duas linhas fixas, chamadas de *coordenadas* do ponto. Essa forma permitia que Descartes transformasse relações geométricas em equações algébricas. Para ele, a curva era uma série de pontos que possuíam uma propriedade comum e, considerando as coordenadas de um ponto na curva como variáveis, ele podia expressá-la como uma equação que relacionava essas variáveis. (MAOR, 2008, p. n.)

La géométrie possui cerca de cem páginas e está dividida em três partes. Na primeira parte são apresentados os princípios da geometria algébrica, já com um avanço em relação aos gregos. Enquanto que os gregos consideravam uma variável sendo o comprimento de um segmento, o produto de duas variáveis à área de um retângulo e o produto de três variáveis ao volume de um paralelepípedo retângulo, Descartes ia mais além com a aritmetização da geometria. Já na primeira parte de sua obra, marcava x num eixo dado e

[5] O leitor pode consultar exemplos de aplicação na obra "The historical development of the Calculus", de C. H. Edwards Jr (1979, p. 105-109).

um comprimento *y*, formando com esse eixo um ângulo fixo, construindo, assim, pontos cujos *x* e *y* satisfizessem a relação (Figura 1).

Figura 1 - Representação dos eixos x e y por Descartes



Fonte: Eves (2011, p. 385).

A partir de um segmento unitário seria possível representar qualquer potência de uma variável, ou produto de variáveis, por meio de um segmento de reta e atribuir valores a essas variáveis para construir o segmento de reta. Por exemplo, seja a relação $y = x^2$, para cada valor de *x*, há de se construir o *y* correspondente. Descartes demonstrou interesse especial em obter relações como essa para curvas descritas cinematicamente, mostrando casos em grau maior que dois (EVES, 2011). Vale destacar que seu sistema de coordenadas era oblíquo, e não retangular, e ele considerava apenas os pontos no primeiro quadrante – coordenadas positivas.

Na segunda parte de *La géométrie*, Descartes expõe uma classificação de curvas e um método de construir tangentes a curvas, enquanto a terceira parte discute, entre outros, a resolução das equações de grau maior que dois, utilizando a *regra de sinais de Descartes*. O objetivo dessa regra é determinar limites para o número de raízes positivas e o número de raízes negativas de um polinômio.

Toda a *La géométrie*, praticamente, dedica-se a uma completa aplicação da álgebra à geometria e vice-versa, pouco se assemelhando ao que hoje se considera como geometria analítica. Para Boyer, embora Descartes tivesse razão ao dizer que o problema de achar a normal (ou tangente) a uma curva fosse de grande importância, mas o seu método era menos eficiente que o que Fermat tinha desenvolvido na mesma época. Além disso, a sua geometria analítica estava longe das considerações práticas que utilizamos hoje associadas com o uso de coordenadas.

Pierre de Fermat (1601 - 1665), assim como Descartes, iniciou o uso de coordenadas a partir da aplicação da álgebra a problemas geométricos da antiguidade, embora com pontos de vista diferentes, pois Fermat dava ênfase ao esboço de soluções de equações indeterminadas, em vez de à construção geométrica das soluções de equações algébricas determinadas.

Reconhecido como um dos precursores da moderna teoria dos números e também como um dos criadores da geometria analítica e do cálculo diferencial, Fermat deixou contribuições significativas, embora não tenha escrito obras completas, sendo que muitos dos seus trabalhos permaneceram manuscritos em vida e ficaram conhecidos através de cartas a seus amigos e colaboradores.

Em 1629, Fermat se propôs a reconstruir o *Lugares planos* de Apolônio, baseado em referências apresentadas na *Coleção matemática* de Papus, no qual descobriu o princípio fundamental da geometria analítica: uma equação envolvendo duas variáveis descreve uma curva no plano. Essa descoberta foi feita um ano antes da publicação de *La géométrie* de

Descartes, por isso Fermat pode ser considerado coinventor da geometria analítica. Ele realizou estudos sobre equações de retas e de cônicas em um pequeno tratado intitulado *Ad lócus planos et sólidos isagoge* (Introdução aos lugares planos e sólidos), que foi publicado após a sua morte. Sua exposição era muito mais sistemática e didática que a de Descartes e sua geometria analítica era mais próxima que a dos tempos atuais pelo fato de se utilizar um sistema de eixos coordenados ortogonais.

Assim como Descartes, Fermat considerava a existência de uma geometria analítica para além de duas dimensões, como ele mesmo escreveu:

> Há certos problemas que envolvem só uma incógnita e que podem ser chamados determinados, para distingui-los dos problemas de lugares. Há outros que envolvem duas incógnitas e que nunca podem ser reduzidos a uma só, e esses são os problemas de lugares. Nos primeiros problemas, procuramos um ponto único, nos segundos uma curva. Mas se o problema proposto envolve três incógnitas, deve-se achar, para satisfazer à equação, não apenas um ponto ou uma curva, mas toda uma superfície. Assim aparecem superfícies como lugares, etc. (BOYER, 1974, p. 255).

Em 1629, Fermat fez duas descobertas significativas sobre lugares, sendo uma delas o tratado chamado *Método para achar máximos e mínimos*. Ele estudou curvas do tipo $y = x^n$, onde $n \in \mathbb{Z}$, conhecidas hoje como "parábolas" ou "hipérboles de Fermat", nos casos em que *n* é positivo ou negativo, respectivamente, o que descreve uma geometria analítica de curvas planas de grau superior. Além disso, para curvas polinomiais da forma $y = f(x)$, produziu um método para encontrar pontos em que a função assume um máximo ou um mínimo. Nesse método, ele considera por hipótese que, em um ponto de máximo ou de mínimo *x*, os valores de *f(x)* e de *f(x+e)*, para *e* pequeno, são próximos. Daí ele comparou o valor de *f(x)* num ponto com o valor *f(x + e)* num ponto vazio, sendo a variação quase imperceptível, então igualou *f(x)* = *f(x+e)*, em seguida, dividiu o resultado por *e*, e fez *e* = 0. Os pontos de máximo e de mínimo eram então calculados igualando-se a zero a expressão obtida:

$g(x) = \frac{f(x+e)-f(x)}{e}\Big|_{e=0}$.

Essa expressão é igual à derivada da função *f(x)*:

$g(x) = \lim_{e \to 0} \frac{f(x+e)-f(x)}{e} = f'(x)$.

Em essência, esse processo tem hoje o nome de diferenciação e destaca Fermat como um dos precursores do cálculo diferencial.

Para encontrar tangentes a uma curva polinomial do tipo $y = f(x)$, Fermat desenvolveu também uma técnica, mas sem apresentar as justificativas convincentes. Limitou-se a dizer que era similar ao método usado para encontrar máximos e mínimos. A respeito de áreas sob curvas, Fermat obteve resultados produzindo um método para calcular, na notação moderna, $\int_a^b x^n dx$, para *n* fracionário, com $n \neq 1$, generalizando um resultado de Cavalieri.

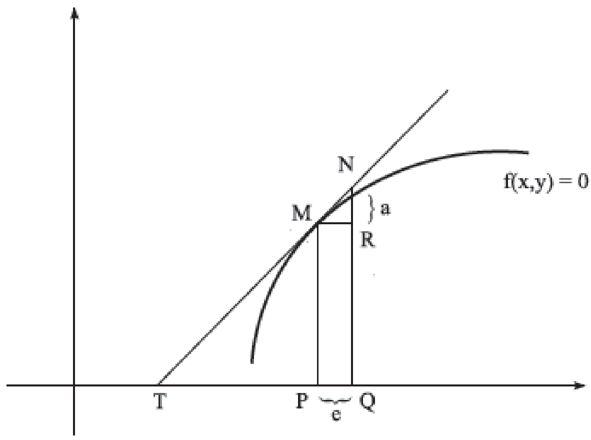
Embora Fermat tenha se ocupado com muitos aspectos da análise infinitesimal – tangentes, quadraturas, volumes, comprimentos de curvas, centros de gravidade, não aparece em seus escritos a relação que denota a natureza inversa dos problemas de área e tangente, que conhecemos hoje como o teorema fundamental do cálculo.

O matemático inglês Isaac Barrow (1630 – 1677) desenvolveu um método para encontrar tangentes que se assemelha com o que é usado atualmente no cálculo diferencial. O método seria parecido com o de Fermat, só que ao invés de usar uma única letra *e*, usou duas quantidades equivalentes aos Δx e Δy. Para uma curva definida pela equação polinomial

$f(x, y) = 0$, substituía *x* ao equivalente *x* + *e*, e substituía *y* por *y* + *a*, e então desprezava os termos que não continham *a* ou *e*, para em seguida eliminar os termos com grau maior do que um em *a* e *e*. Barrow considerava o "triângulo característico" da curva (Figura 1) e observava que a razão *a/e* = *MP/TP* por semelhança de triângulos, e finalmente calcular o valor da subtangente *TP*.

Eves ressalta que "apesar de indícios tênues que apontam noutra direção, em geral considera-se que Barrow foi o primeiro a perceber, de maneira plena, que a diferenciação e a integração são operações inversas uma da outra" (EVES, 2011, p. 435) e que a descoberta do Teorema Fundamental do Cálculo aparece enunciada e provada nas *Lectiones* de Barrow.

Figura 1 - Triângulo característico



Fonte: Eves (2011, p. 435).

O maior avanço do Cálculo se deu na segunda metade do século XVII, quando suas principais ideias já eram mais ou menos bem conhecidas pela comunidade matemática. O método dos indivisíveis tinha sido aplicado com efeito a um conjunto de curvas e sólidos, o método da exaustão de Arquimedes, aperfeiçoado, revisado, havia resolvido a quadratura da família de curvas $y = x^n$ e já havia uma concepção da ideia de limite e o reconhecimento do teorema fundamental. O que faltava era unificá-los em um único sistema, com um procedimento geral e sistemático, que permitisse resolver esses problemas com facilidade e eficiência. Finalmente, tal procedimento foi fornecido por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, que realizaram seus trabalhos independentes um do outro.

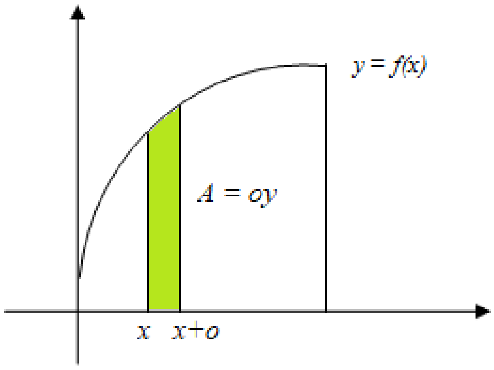
O Cálculo com Newton e Leibniz

No início do século XVIII, Newton publicou três trabalhos sobre o cálculo diferencial, após anos depois de escritos. Considerada a sua obra mais importante, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Princípios matemáticos da filosofia natural), publicada em 1687, ele propôs suas leis de movimento e a lei de gravitação universal, apresentando os fundamentos da mecânica clássica e sua teoria de fluxões. Newton apresentou nessa obra diversas proposições sobre velocidades, acelerações, tangentes e curvaturas que motivaram suas pesquisas sobre o cálculo infinitesimal.

O cálculo diferencial é o estudo das taxas de mudança de uma quantidade variável. Se considerarmos os fenômenos físicos ao nosso redor, a maioria envolve quantidades que mudam com o tempo, como exemplos, a velocidade de um carro em movimento ou as leituras de temperatura de um termômetro. Chamamos, atualmente, essas quantidades de variáveis, enquanto Newton denominava "fluente". O cálculo diferencial está relacionado à descoberta da taxa de mudança de uma variável, ou como diria Newton, a "fluxão" de um determinado fluente.

Newton apresentou em sua obra *Principia* três concepções distintas para o cálculo: a concepção infinitesimal, o método das fluxões e o método das primeiras e últimas razões. Na concepção infinitesimal, ele trabalhou com quantidades infinitesimalmente pequenas, chamada de "momentos". O momento da área seria o cálculo da área abaixo de uma curva, isto é, o crescimento da área da região quando a variável *x* aumenta da quantidade infinitesimal *o*. A taxa de crescimento da área no ponto de abscissa *x* é igual à ordenada *y* = *f(x)* (Figura 2), como a calculou.

Figura 2 - O momento da área segundo Newton



Fonte: Oliveira (2022).

Ao mesmo tempo, ele determinou que a área sob a curva era dada pelo modo inverso ao da derivação, quer dizer, calculando a integral definida de *f*. Na obra *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* (Sobre a Análise de Equações com um Número Ilimitado de Termos), publicada em 1711, Newton definiu a relação entre quadratura e derivada, embora não haja definições precisas de derivada ou de integral, nem de quantidade infinitesimais.

> Tendo calculado $dy/dx = \dot{y}/\dot{x}$ a partir da equação polinomial $f(x, y) = 0$, Newton coloca o problema inverso: Para encontrar *y* em termos de *x*, dada uma equação que expressa a relação entre *x* e a razão $\dot{y}/\dot{x}$ de suas fluxões. Caso esta equação seja da forma simples
>
> $$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \Phi(x)$$
>
> este é simplesmente o problema do que chamamos agora de antidiferenciação, enquanto o caso geral $g(x, \dot{y}/\dot{x}) = 0$ é uma equação diferencial.
> (EDWARDS JR., 1979, p. 194, tradução nossa)[6].

[6] Texto original: "Having calculated $dy/dx = \dot{y}/\dot{x}$dy from the polynomial equation $f(x, y) = 0$, Newton poses the converse problem: To find *y* in terms of *x*, given an equation expressing the relationship between *x* and the ratio $\dot{y}/\dot{x}$ of their fluxions. In case this equation is of the simple form $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \Phi(x)$".

Assim Newton discute o cálculo de áreas por meio da antidiferenciação, o que aponta como a primeira aparição história do teorema fundamental do cálculo na forma explícita $\frac{dA}{dx} = y$, sendo *A* a área sob a curva *y* = *f(x)*.

Em *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitorum* (Método das Fluxões e das Séries Infinitas), publicada em 1736, Newton introduziu o seu método das fluxões, mostrando avanços conceituais sobre o método dos infinitesimais. Considerava as quantidades matemáticas como sendo de natureza contínua, como se fossem o espaço descrito por um corpo em movimento, que possuía velocidades chamadas de "fluxões".

Newton considerava duas variáveis que se relacionavam através de uma equação, como por exemplo, o que chamamos hoje de "função", se tomarmos $y = x^2$ representamo-la por um gráfico de uma parábola no plano *xy*. Newton pensou o gráfico de uma função como uma curva gerada por um ponto móvel *P(x, y)* e à medida que *P* percorre a curva, as coordenadas *x* e *y* variam continuamente com o tempo, como se o próprio tempo fosse "fluindo" a uma taxa uniforme, por isso denominou "fluente". Daí ele foi determinar suas fluxões, ou seja, as taxas de mudança de *x* e *y* em relação ao tempo, considerando a diferença nos valores de *x* e de *y* dividindo-a pelo intervalo de tempo transcorrido. Logo após, fez o intervalo de tempo transcorrido igual a 0, pensando nele como tão pequeno a ponto de ser desprezível.

Na terceira exposição de seu Cálculo, *De quadratura curvarum*, publicada em 1704, Newton tenta evitar as quantidades infinitamente pequenas e as quantidades que fluem, explicando o seu método baseando-se no conceito de primeiras e últimas razões.

Leibniz tinha uma abordagem diferente de Newton. Ele concebeu seu cálculo diferencial e integral por volta de 1675 e dois anos depois já tinha um sistema completamente desenvolvido e funcional. Enquanto as ideias de Newton eram baseadas na Física e ele considerava a fluxão como uma taxa de mudança, ou velocidade, de um ponto em que o movimento contínuo gerava uma curva *y* = *f(x)*, Leibniz se aproximava mais da filosofia e moldou suas ideias de um modo mais abstrato, pensando em termos de "diferenciais", pequenos acréscimos nos valores das variáveis *x* e *y*. (MAOR, 2008).

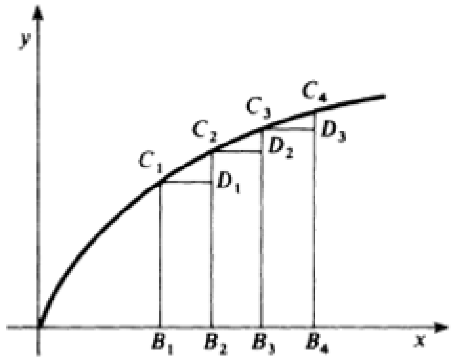
A operação fundamental no cálculo de Leibniz era o cálculo de diferenças, equivalente à derivada, cuja operação inversa era a soma, equivalente à integral. Ele tinha noção da importância para o pensamento matemático de uma notação apropriada. Por conseguinte, em 29 de outubro de 1675, usou pela primeira vez um *S* alongado como símbolo de integral, proveniente da primeira letra da palavra latina *summa* (soma), que pretendia indicar uma soma de indivisíveis. Daí então passou a chamar seu método de cálculo de tangentes de *calculus diferentialis*, e o cálculo de áreas e volumes por *calculus summatorius* ou *integralis*, que denominamos diferenciais e derivadas atualmente, escrevendo $\int xdy$ e $\int ydx$ para integrais. Sua terminologia originou o termo "cálculo diferencial e integral".

Em 1684 Leibniz publicou seu primeiro artigo sobre o cálculo diferencial, sob o título *Nova methodus pro maximis et minimis*, *itemque tangentibus*, *qua Nec irrationales quantitates moratur* (Um novo método para máximos e mínimos, e também para tangentes, que não é obstruído por quantidades irracionais) vinte anos antes da publicação *De Quadratura* de Newton em 1704, onde define *dx* como um intervalo finito arbitrário e *dy* pela proporção $\frac{dy}{dx} = y$: subtangente (EVES, 2011, p. 443). Ele já havia percebido que a determinação da tangente a uma curva dependia da razão das diferenças entre as ordenadas e as abscissas quando estas se tornam infinitesimalmente pequenas, assim como a quadratura dependia da soma de retângulos com bases sobre o eixo das abscissas infinitesimalmente pequenas. O "triângulo característico" (ou infinitesimal)[7] foi o ponto de partida para o seu estudo do cálculo diferencial.

A notação para o cálculo era "mais conveniente e flexível", como disse Eves (2011, p. 443), do que a de Newton. No entanto, seu cálculo era considerado mais complicado em relação ao desenvolvido por Newton, mas pode-se dizer que o cálculo de Leibniz facilitou hoje a resolução de problemas que antes exigiam um grande esforço.

Em *Acta Eruditorum*, de 1686, Leibniz explicou o cálculo integral mostrando que as quadraturas são casos especiais do método inverso do das tangentes, destacando a relação inversa entre diferenciação e integração no teorema fundamental do cálculo. A integral $\int ydx$ é definida como a área sob uma curva, composta por uma variedade de retângulos verticais infinitesimais com alturas *y* e largura *dx*, como mostra a Figura 3.

Figura 3 - Representação da área sob a curva por Leibniz



Fonte: Edwards Jr. (1979, p. 257).

Segundo Boyer (1974, p. 296), o cálculo de Newton e Leibniz mostrou a importância das curvas não-algébricas na nova análise, que a geometria de Descartes tinha excluído, bem como viram que as operações da nova análise podiam ser aplicadas tanto a séries infinitas como a expressões algébricas finitas. Não restam dúvidas que as abordagens separadas desses dois desenvolveram o cálculo como uma disciplina atualizada e coerente.

O trabalho formal de Newton sobre o cálculo compreendia o período de 1664 a 1666 e, embora tenha mostrado a colegas da Inglaterra, não publicou nada até seus *Principia*, em 1687, e *Opticks*, de 1704. Enquanto que o período que Leibniz trabalhou com cálculo foi de 1672 a 1676, publicando seus artigos *Acta Eruditorum* em 1684 a 1686. Apesar de Newton ter sido o precursor de uma teoria de cálculo bem desenvolvida, Leibniz foi o primeiro a publicar seus resultados. E isso rendeu uma verdadeira disputa no início do século XVIII, por parte de seguidores de Newton contra os trabalhos de Leibniz que o acusaram de plágio. Contudo, a história da matemática reconhece que Newton e Leibniz desenvolveram independentemente o Teorema Fundamental do Cálculo e, atribui concomitantemente a honra da criação do Cálculo Infinitesimal.

[7] O "triângulo característico" já tinha sido usado por Pascal para achar a quadratura de senos e Barrow o aplicara ao problema de tangentes, como mostramos na Figura 1.

O rigor e o método de Cauchy

O século XVIII e os dois seguintes foram muito produtivos para a história da matemática. Dentre toda a intensa atividade matemática, o cálculo, apoiado pela geometria analítica, foi o maior instrumento matemático e se mostrou poderoso e eficiente para resolver problemas antes insuperáveis (EVES, 2011, p. 462). Assim como o século XVIII foi dedicado a explorar novos métodos do cálculo, foi no século XIX que o cálculo recebeu uma fundamentação lógica rigorosa e o século XX foi o de generalizar os progressos alcançados. Há de se levar em conta os vários fatores do desenvolvimento social, como a construção de grandes navios, a industrialização da Europa Ocidental e dos Estados Unidos, o clima de guerra mundial, o desenvolvimento da computação eletrônica, e tantos outros, que culminou em uma divisão da matemática em pura e aplicada, sendo esta última relativa a aplicações práticas dos problemas vigentes.

O rigor dado aos resultados do cálculo infinitesimal é atribuído ao francês Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857), um precursor da análise matemática. Apesar de ter iniciado a sua carreira como engenheiro civil, dedicou-se em seguida à matemática, tornando-se professor na *École Polytechnique* e publicando frequentemente seus resultados que, dentre vários tópicos, destacava-se especialmente a teoria das funções de variável complexa.

Segundo Boyer (1974, p. 380), para representar graficamente uma função $w = f(z)$, sendo w e z variáveis complexas, ao necessitar de quatro dimensões reais, não era possível o recurso à visualização geométrica. A teoria de variáveis complexas implicava, portanto, um grau mais alto de abstração que a de funções de uma variável real, o que justificaria a necessidade de definições mais precisas dos conceitos. Em suas três obras *Cours d'analyse de l'École Polytechnique* (1821), *Résumé des leçõns sur Le calcul infinitesimal* (1823) e *Leçons sur Le calcul différentiel* (1829), Cauchy deu ao cálculo elementar o caráter que tem hoje.

Os conceitos de função e de limite de função eram fundamentais no Cálculo de Cauchy. Para a definição da derivada de $y = f(x)$, considerou um incremento $\Delta x = i$ e estabeleceu a razão:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

Em seguida, calculou o limite quando Δx e Δy tendem a zero.

A integração, diferentemente como era tratada anteriormente, como uma operação inversa à diferenciação, foi apresentada por Cauchy com uma definição de maneira particular, considerando o limite de somas integrais, como destaca Boyer:

> Se $S_n = (x_i - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$ então o limite S dessa soma S_n, quando os comprimentos dos intervalos $x_t - x_{t-1}$ decrescem indefinidamente é a integral definida da função $f(x)$ no intervalo de $x = x_0$ a $x = X$. (BOYER, 1974, p. 380).

A sua definição permitiu as generalizações como são apresentadas atualmente da noção de integral.

Na prova da relação usual entre a integral e a antiderivada, Cauchy utilizou o teorema do valor médio como uma generalização evidente do já conhecido teorema de Rolle, como é apresentado por Boyer:

> Se $f(x)$ é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b) então existirá algum valor x_0 tal que $a < x_0 < b$ e $f(b) - f(a) = (b - a)f'(x_0)$. (BOYER, 1974, p. 381).

Até então o teorema do valor médio não havia chamado atenção, o que acabou tendo um papel fundamental na análise, ficando conhecido como teorema do valor médio de Cauchy, apresentado por Boyer (1974) na forma geral:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(y_0)}$$

considerando algumas restrições sobre *f*(*x*) e *g*(*x*).

Com essa prova, o Teorema Fundamental do Cálculo que relaciona as duas operações como inversas deixou de ser um corolário da definição de integração. O teorema afirma que: Se *f* é uma função contínua em [x_0, *X*], se $x \in [x_0, X]$ e se $\boldsymbol{F(x)=\int_{x_0}^{X} f(x)dx}$, então $F'(x)=f(x)$.

Cauchy apresenta a formulação rigorosa do teorema em sua vigésima sexta *Lessons Given at the École Royale Polytechnique on the Infinitesimal Calculus*, em 1823, como descreve Edwards Jr (1997):

> Dada uma função contínua *f(x)* no intervalo [x_0, *X*], ele quer provar que a nova função $\tilde{F}(x)$ definida para $x \in [x_0, X]$ por
>
> $\tilde{F}(x)=\int_{x_0}^{x} f(x)dx$ (27)
>
> é uma função primitiva ou antiderivada de *f(x)*, ou seja, $\tilde{F}'(x)=f(x)$ em [*a*, *b*]. A única mudança de detalhe em sua exposição que se poderia fazer hoje seria escrever *f(t) dt* em vez de *f(x) dx* no integrando de (27), de modo a distinguir a falsa variável de integração da variável do limite superior.
>
> Ao aplicar a propriedade (26) e a propriedade de valor médio (24), Cauchy observa que
>
> $$\tilde{F}(x+\alpha)-\tilde{F}(x)=\int_{x_0}^{x+\alpha} f(x)\,dx-\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx=\int_{x}^{x+\alpha} f(x)\,dx$$
>
> $\tilde{F}(x+\alpha)-\tilde{F}(x)=\alpha f(x+\theta\alpha)$ (28)
>
> por algum $\theta \in [0, 1]$. Dividindo os dois lados de (28) por α e tomando limites com $\alpha \to 0$, ele conclui da definição de derivada e de continuidade de *f* que
>
> $\tilde{F}'(x)=f(x)$ (29)
>
> como desejado. Portanto
>
> $\frac{d}{dx}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right)=f(x)$ (30)
>
> se *f* é contínua.
>
> Para deduzir dessa primeira forma a segunda forma familiar do teorema fundamental, Cauchy considera uma função arbitrária *F(x)* tal que $F'(x) = f(x)$ em [x_0, *X*]. Se
>
> $\omega(x)=\tilde{F}(x)-F(x)$,
>
> então, $\boldsymbol{\omega'(x)=\tilde{F}'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0}$, então o teorema do valor médio fornece
>
> $$\omega(x)=\omega(x_0)+(x-x_0)\omega'(\bar{x})=\omega(x_0)$$
>
> para todo $x \in [x_0, X]$. Portanto
>
> $\tilde{F}(x)-F(x)=\tilde{F}(x_0)-F(x_0)=-F(x_0)$,
>
> $\tilde{F}(x)=F(x)-F(x_0)$,
>
> $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx=F(X)-F(x_0)$ (31)
>
> para alguma antiderivada *F* de *f*.
>
> (EDWARDS JR., 1979, p. 321-322, tradução nossa)[8].

[8] Texto original: "Given a continuous function f(x) on the interval [x0, X), he wants to prove that the new function $\tilde{F}$(x) defined for x ∈ [x0, X) by $\tilde{F}(x)=\int_{x_0}^{x} f(x)dx$ (27) is a primitive function or antiderivative of f(x), that is, $\tilde{F}$'(x)

E assim, segundo Edward Jr (1979), Cauchy completa a teoria geral da integração de funções contínuas em intervalos fechados. Embora a Análise de Cauchy tenha buscado substituir os princípios da aritmética pela intuição geométrica nos fundamentos da Análise, foram apenas em parte, pois antes do final do século XIX, os próprios números reais eram entendidos apenas de maneira intuitiva. Outros matemáticos posteriores, no entanto, levaram o mérito de fundamentar o Cálculo.

Conclusão: conceituação do Teorema Fundamental do Cálculo

Nesse período histórico que percorremos, vimos que alguns problemas particulares motivaram o desenvolvimento do Teorema Fundamental e a sua criação tornou possível o desenvolvimento algorítmico do que conhecemos hoje como o Cálculo. Várias técnicas foram criadas e aperfeiçoadas, ao mesmo tempo que os conceitos, como de integração e derivação, foram sendo representados. Atualmente, eles permeiam também os problemas que são abordados nas situações didáticas e, geralmente, são ensinados de forma independente.

A formulação rigorosa realizada por Cauchy continua sendo reproduzida hoje em grande parte dos livros de Cálculo. A relação entre a derivada e a integral é declarada da seguinte forma:

> Teorema Fundamental do Cálculo
> Suponhamos *f* contínua em um intervalo fechado [*a*, *b*].
> Parte I Se a função *G* é definida por
> $$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$
> para todo *x* em [*a*, *b*], então *G* é uma antiderivada de *f* em [*a*, *b*].
> Parte II Se *F* é qualquer antiderivada de *f* em [*a*, *b*], então
> $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$
> (SWOKOWSKI, 1994, p. 362).

A relação entre o acúmulo de uma quantidade e a taxa de variação de seu acúmulo é um dos marcos principais no desenvolvimento do Cálculo. Antes do teorema fundamental demonstrado por Newton e Leibniz, o que chamamos de integração foi concebido principalmente como a determinação de uma quantidade cumulativa, como comprimento do arco, área, volume ou massa, e o que chamamos de diferenciação foi concebido como

= f(x) on [a, b]. The only change of detail in his exposition that one might make today would be to write f(t) dt instead of f(x) dx in the integrand of (27), so as to distinguish the dummy variable of integration from the variable upper limit. Applying property (26) and then the mean value property (24), Cauchy notes that $\tilde{F}(x+\alpha) - \tilde{F}(x) = \int_{x_0}^{x+\alpha} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{x}^{x+\alpha} f(x)\,dx$, $\tilde{F}(x+\alpha) - \tilde{F}(x) = \alpha f(x+\theta\alpha)$ (28) for some θ ∊ [0, 1). Dividing both sides of (28) by α and then taking limits as α→0, he concludes from the definition of the derivative and the continuity of f that $\tilde{F}'(x) = f(x)$ (29) as desired. Thus $\frac{d}{dx}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right) = f(x)$ (30) if f is continuous. To deduce from this first form the second familiar form of the fundamental theorem, Cauchy considers an arbitrary function F(x) such that F'(x) = f(x) on [x0, X). If $\omega(x) = \tilde{F}(x) - F(x)$ then $\omega'(x) = \tilde{F}'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$, so the mean value theorem gives $\omega(x) = \omega(x_0) + (x - x_0)\omega'(\bar{x}) = \omega(x_0)$ for all x ∊ [x0, X]. Therefore $\tilde{F}(x) - F(x) = \tilde{F}(x_0) - F(x_0) = -F(x_0)$, $\tilde{F}(x) = F(x) - F(x_0)$, $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = F(X) - F(x_0)$ (31) for any antiderivative F of f ".

velocidade angular, tangência e curvatura. Como afirma Thompson (1994, p. 234), essas duas classes de problemas foram concebidas separadamente, cada uma com técnicas limitadas ao tipo de problema abordado.

> Embora ambas as classes de problemas sejam prontamente consideradas capazes de inversão separadamente, portanto, dada a área sob a curva ou a tangente à curva em termos de abscissa ou ordenada, para encontrar a curva, a relação entre o método tangente e a quadratura não é tão óbvio imediatamente. A relação entre tangente e arco acabou se tornando um dos elos mais significativos entre processos diferenciais e integrais e, por essa e outras razões, o problema da retificação tornou-se crucial no século XVII. A natureza inversa das duas classes de problemas foi abordada em termos de um modelo geométrico por Torricelli, Gregory e Barrow, mas somente com Newton a relação emergiu como central e geral. (BARON, 1969, p. 4-5, tradução nossa)[9].

Esse foco nas duas classes de problemas se desenvolveu como resultado de realizações anteriores, como discute Thompson (1994, p. 235), de que a covariância de duas magnitudes pode ser representada graficamente, ou seja, qualquer problema relacionado à acumulação pode ser representado como a determinação de uma área e qualquer problema relacionado à taxa de mudança pode ser representado como a determinação da tangente.

Thompson (1994, p. 239) supunha que esse processo de acumulação das taxas de variação já era visualizado mentalmente por Newton, apesar deste não fazer uma demonstração lógica, mas que o levou a ter ciência do teorema fundamental.

Uma outra noção que Newton percebeu foi a de fluxões e fluentes, como foi mencionado anteriormente, que hoje chamamos de funções. Seu método era começar com uma expressão analítica para uma função f que fornece a taxa de variação de alguma quantidade e derivar uma expressão analítica para uma função F que fornece a quantidade cumulativa dessa quantidade.

Não é esperado que os alunos recriem essas ideias de Newton, mas é possível desenvolver abordagens didáticas para promover a visualização e incentivá-los na produção de novas técnicas para apoiar a compreensão acerca dos conceitos relacionados.

Referências

ÁVILA, G. **Várias Faces da Matemática**. 2ª. ed. [S.l.]: Edgar Blucher, 2009.

BARON, M. E. **The Origins of the Infinitesimal Calculus**. Oxford: Pergamon, 1969.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

[9] Texto original: "Although both classes of problems are readily seen to be separately capable of inversion, thus, given the area under the curve or the tangent to the curve in terms of abscissa or ordinate, to find the curve, the relation between tangent method and quadrature is not so immediately obvious. The relation between tangent and arc ultimately became one of the most significant links between differential and integral processes and, for this and other reasons, the problem of rectification became crucial in the seventeenth century. The inverse nature of the two classes of problems was approached in terms of a geometric model by Torricelli, Gregory and Barrow but only with Newton did the relation emerge as central and general.".

EDWARDS JR., C. H. **The historical development of the calculus**. New York: Springer-Verlag, 1979.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 5ª. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011. Tradução Hygino H. Domingues.

MAOR, E. **e:** a história de um número. Tradução de Jorge Calife. 5ª. ed. [S.l.]: Record, 2008. Disponivel em: <https://lelivros.love/book/baixar-livro-e-a-historia-de-um-numero-eli-maor-em-pdf-epub-e-mobi-ou-ler-online/>. Acesso em: 14 set. 2021.

OLIVEIRA, P. B. **Modelização do Teorema Fundamental do Cálculo para um Sistema Micromundo à luz da Teoria Antropológica do Didático.** Universidade Federal de Pernambuco. Recife, p. 302. 2022.

SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com Geometria Analítica**. 2ª. ed. São Paulo: Makron Books, v. 1, 1994.

THOMPSON, P. W. Images of Rate and Operational Understanding of the Fundamental Theorem of Calculus. **Educational Studies in Mathematics**, 26, 1994. 229-274.