

Interface entre Modelagem Matemática e trilhas matemáticas ao ar livre: um olhar para produções sobre esta temática

Interface between Mathematical Modeling and Outdoor Mathematical Trails: A Look at Productions on This Topic

Elida Maiara Velozo de Castro¹
Janecler Aparecida Amorin Colombo²
Edineia Zarpelon³

Resumo

Neste estudo temos como objetivo investigar diferentes dimensões da interface entre modelagem matemática e trilhas matemáticas, mediadas pelo sistema *MathCityMap*, por meio de um mapeamento sistemático de literatura. Para tanto, analisamos produções de 2013 a 2024 tendo como base três fontes: o banco de teses e dissertações da Capes (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), a plataforma de pesquisa Google Acadêmico e os livros do *The International Community of Teachers of Modelling and Applications* (ICTMA). A partir de uma busca inicial, encontramos dezenove trabalhos que aprofundam discussões sobre Modelagem matemática e trilhas matemáticas mediadas pelo *MathCityMap*. Assim, o mapeamento e a discussão da produção selecionada nos possibilitaram identificar quatro dimensões, da interface entre Modelagem Matemática e trilhas matemáticas, tais sejam: problema com referência na realidade, uso de tecnologia, ações requeridas e participação dos alunos. Nesta interface, a conexão entre matemática e mundo real foi o fator substancialmente de destaque em todos os trabalhos analisados, assim como o fato de a tarefa ser orientada por um problema e de que as etapas do ciclo de Modelagem podem subsidiar o (bom) desenvolvimento das tarefas de trilhas matemáticas. Além disso, constatamos a aprendizagem autônoma no trabalho em grupo, evidenciando o papel protagonista do aluno ao resolver as tarefas tanto em Modelagem Matemática quanto nas trilhas.

Palavras chave: modelagem matemática; trilhas matemáticas; mapeamento sistemático de literatura; *mathcitymap*.

Abstract

In this study we aim to investigate different dimensions of the interface between mathematical modeling and mathematical trails, mediated by the *MathCityMap* system, through a systematic mapping of literature. To do so, we analyzed productions from 2013 to 2024 based on three sources: the bank of theses and dissertations from Capes (Coordination for the Improvement of Higher Education Personnel), the Google Scholar search platform and the

¹ Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Campus Pato Branco | elidamaiara.vc@gmail.com

² Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Campus Pato Branco | janecler@utfpr.edu.br

³ Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Campus Pato Branco | ezarpelon@utfpr.edu.br

books from The International Community of Teachers of Modeling and Applications (ICTMA). From an initial search, we found nineteen works that deepen discussions about Mathematical Modeling and mathematical trails mediated by MathCityMap. Thus, the mapping and discussion of the selected production enabled us to identify four dimensions of the interface between Mathematical Modeling and mathematical trails, namely: problem with reference to reality, use of technology, required actions and student participation. In this interface, the connection between mathematics and the real world was the substantially prominent factor in all the works analyzed, as well as the fact that the task is guided by a problem and that the stages of the Modeling cycle can support (good) development of math trail tasks. Furthermore, we observed autonomous learning in group work, highlighting the student's leading role in solving tasks both in Mathematical Modeling and on the trails.

Keywords: mathematical modeling; mathematical trails; systematic literature mapping; mathcitymap.

Introdução

Ao longo dos últimos anos, discussões no âmbito da Educação Matemática salientam a importância do ensino baseado na realidade, o qual deu origem a numerosas concepções sobre metodologias e tendências para o ensino de Matemática. Ao considerar que o principal objetivo da Modelagem Matemática⁴ é dar sentido a um problema do mundo usando a matemática e encontrar uma solução adequada para ele, se reconhece que uma atividade de modelagem se insere nesse panorama de discussões.

De modo geral, a Modelagem Matemática pode ser descrita como uma atividade cuja característica essencial está no fato de que envolve a transição entre a realidade e a matemática. Ou seja, ela pode ser definida como uma forma de se entender ou explicar o mundo real em termos matemáticos (Ferri, 2018). Desenvolvida essencialmente em grupos, uma atividade de modelagem matemática requer "entender aspectos ou propriedades, explicar ou prever especificidades e apontar para uma tomada de decisão relativamente às situações" (Almeida; Castro, 2023, p. 3). Assim, na transição entre a realidade e a Matemática é identificado um problema, no contexto de uma situação da realidade; são selecionadas variáveis essenciais da situação e são definidas hipóteses; é realizada uma matematização da situação que fornece ao problema uma roupagem matemática; é construído um modelo matemático a partir do uso de conceitos, relações e propriedades matemáticas, provendo uma solução matemática para o problema; esta, por sua vez, é interpretada e avaliada frente à situação do mundo real que originou a atividade (Almeida; Castro, 2023).

Ainda, ao falar de ensino baseado na realidade, podemos considerar as trilhas matemáticas. Para fins de esclarecimento, neste trabalho, o termo "trilha matemática" faz referência a um conjunto de tarefas matemáticas, elaboradas ao ar livre e realizada em pequenos grupos. Os membros do grupo trabalham juntos, comunicam-se e encontram estratégias comuns e mais adequadas para resolver os problemas propostos. Assim, combina o uso da matemática na vida real com um passeio agradável, surgindo daí a denominação "trilhas matemáticas ao ar livre". Em particular, quando as trilhas são percorridas com suporte

⁴ O termo "Modelagem Matemática" (em maiúsculo) será utilizado quando se referir à abordagem metodológica e, em minúsculo, quando se referir à atividade decorrente dessa abordagem.

do sistema *MathCityMap*⁵, os alunos têm a oportunidade de explorar a matemática ligada a objetos reais, resolvendo problemas padronizados e não padronizados e têm à disposição dicas, *feedbacks* e um exemplo de solução (Zarpelon; Colombo; Souto, 2022). Um problema de trilha matemática é, portanto, autêntico e relacionado ao mundo real. Essas características do problema, da natureza da tarefa e da organização dos sujeitos envolvidos apontam para interfaces entre as trilhas matemáticas e a Modelagem Matemática.

Pesquisas recentes, têm apontado perspectivas promissoras no terreno dessa relação. Entretanto, mesmo reconhecendo potencialidades no uso conjunto de trilhas em/na Modelagem Matemática, são poucos os trabalhos que realizam uma discussão teórica mais aprofundada, bem como são ínfimos os que descrevem ou investigam práticas nessa área. Isso pode estar relacionado à falta de compreensão teórica sobre como realizar tal aproximação como também pelo fato de que a temática “trilhas matemáticas ao ar livre” é recente no Brasil.

Diante disso, sem a intenção de apresentar uma resposta singular ou esgotar reflexões, buscamos, por meio deste estudo, primeiramente investigar a existência de interfaces entre modelagem matemática e trilhas matemáticas mediadas pelo sistema *MathCityMap* e, existindo tais conexões, estabelecer e analisar diferentes dimensões desta interface. Para isso elegemos como foco de investigação examinar trabalhos que abordam o uso de trilhas matemáticas no âmbito da Modelagem Matemática. Utilizamos como fonte de pesquisa o Banco de Teses e Dissertações da Capes (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), a plataforma Google Acadêmico e os livros do *The International Community of Teachers of Modelling and Applications* (ICTMA), todos considerando o período de janeiro de 2013 a janeiro de 2024.

Assim, sem tomar uma ou outra acepção com relação a interface entre Modelagem Matemática e trilhas matemáticas, lançamos um olhar sobre os materiais supracitados, compreendendo que o estudo sobre esses trabalhos pode servir como ponto de partida para a tomada de decisão, reconhecimento de lacunas na área e indicações para investigações futuras. Diante do cenário previamente exposto, nossas opções metodológicas seguem descritas e justificadas na seção a seguir.

Delineamento metodológico

Nossa pesquisa tem caráter qualitativo bibliográfico e se enquadra nos estudos relativos ao “estado da arte”, pois almejamos mapear e discutir determinada produção acadêmica, tomando como referência diferentes campos do conhecimento (Ferreira, 2002). Pesquisas dessa natureza, também denominadas “estado de conhecimento”, procuram:

[...] responder que aspectos e dimensões vêm sendo destacados e privilegiados em diferentes épocas e lugares, de que formas e em que condições têm sido produzidas certas dissertações de mestrado, teses de doutorado, publicações em periódicos e comunicações em anais de congressos e de seminários (Ferreira, 2002, p. 258).

⁵ *MathCityMap* (MCM) é um sistema tecnológico gratuito elaborado especificamente para ensinar matemática ao ar livre, sendo este sistema formado por dois componentes: o portal web e o aplicativo para dispositivos móveis (*smartphones*).

Mais especificamente e buscando “entender e dar alguma logicidade a um grande corpus documental” (Galvão; Ricarte, 2019, p. 58), esta pesquisa trata-se de uma revisão sistemática de literatura. A revisão sistemática de literatura segue protocolos específicos para a estruturação de um tema, sendo uma modalidade de pesquisa que permite avaliar a eficácia de abordagens em um determinado contexto. Sua ênfase reside na replicabilidade por outros pesquisadores, destacando de maneira explícita as bases de dados bibliográficos consultadas (Rocha; Nascimento; Nascimento, 2018; Galvão; Ricarte, 2019).

Utilizaremos o modelo de mapeamento sistemático em educação proposto por Rocha, Nascimento e Nascimento (2018), desenvolvido em três etapas, sendo elas: definição do protocolo, busca e extração de dados e obtenção do resultado.

Além disso, cada etapa é composta por questões auxiliares que estruturam e organizam o desenvolvimento da pesquisa, conforme detalhado na sequência deste documento.

Etapa 1: Definição do protocolo

a) Qual é o objetivo e a questão que norteia o mapeamento?

O objetivo principal é investigar a existência de interfaces entre modelagem matemática e trilhas matemáticas, mediadas pelo aplicativo *MathCityMap*, para estabelecer e analisar diferentes dimensões desta conexão. Este objetivo é norteado pela questão investigativa: “é possível estabelecer conexões entre a modelagem matemática e trilhas matemáticas mediadas pelo aplicativo *MathCityMap*?”

b) Quais os critérios de seleção, inclusão e exclusão dos trabalhos investigados?

Os critérios de seleção determinados foram a definição do período de busca (2013-2024), a análise inicial a partir dos títulos quando as palavras-chave foram inseridas e a disponibilidade total dos trabalhos no local de busca. A delimitação temporal, de 2013 a janeiro de 2024, foi definida pelo fato de que buscamos pesquisas recentes na área, que possam fornecer compreensões e resultados atuais e apontem sugestões e indicações sobre aspectos que ainda podem ser investigados. Para que o trabalho fosse incluído na pesquisa, o critério de inclusão adotado foi o uso de trilhas matemáticas associada à Modelagem Matemática, num contexto educacional. Para o critério de exclusão decidimos eliminar os trabalhos que citam trilhas matemáticas, mas não trazem elementos da Modelagem Matemática de maneira consistente, ou vice-versa e também excluir trabalhos que não são de acesso livre ou não estão em formato de artigo completo.

c) Quais palavras chaves serão utilizadas?

Três palavras chaves foram utilizadas: “trilha matemática”; “modelagem matemática” e “*mathcitymap*”, sendo que as duas primeiras também foram usadas na língua inglesa.

Etapa 2: Busca e extração de dados

a) Definição do local de busca.

Para desenvolver nosso estudo, optamos por investigar os trabalhos publicados na última década no Banco de Teses e Dissertações da Capes, no Google Acadêmico e nos livros do ICTMA. A escolha das fontes considera que: no banco de teses e dissertações da Capes podemos encontrar as pesquisas de mestrado e doutorado desenvolvidas no cenário nacional relativas à temática de interesse; a plataforma Google acadêmico é um recurso de busca abrangente e acessível; e os livros do ICTMA agregam pesquisas internacionais na área de Modelagem Matemática.

b) Definição de cadeia de busca empregada, com dados de período de busca.

No tocante a estudos sobre trilhas matemáticas e Modelagem Matemática, em cenário nacional, a partir de uma busca pelos termos “trilha matemática, modelagem matemática” e “*mathcitymap*, modelagem matemática”, no banco de teses e dissertações da Capes, obtivemos uma tese que traz o uso de trilhas matemáticas associada à Modelagem Matemática, num contexto educacional. A tese encontrada não menciona o sistema *MathCityMap*, por isso não foi considerada nas análises. Entretanto, consideramos oportuno citar essa ocorrência, pois é um trabalho em cenário nacional e que foi indicada por uma relevante fonte de busca.

No Google Acadêmico, procuramos pelos termos “trilha matemática; modelagem matemática; *mathcitymap*” e “*math trail; mathematical modelling; mathcitymap*”. Nesse caso, optamos pela diferente combinação entre termos porque percebemos que poderíamos ter resultados mais expressivos ao ampliarmos nossa busca por produções em língua inglesa. A partir da leitura integral dos trabalhos, reconhecemos um total de quatorze trabalhos associados à Modelagem Matemática em que as trilhas matemáticas aparecem fundamentadas.

A seleção dos trabalhos nos livros das quatro últimas edições do ICTMA, se deu usando a ferramenta localizar e inserindo-se os termos “*trail*” e “*MathCityMap*”. A seguir, por meio da leitura de cada trabalho, identificamos quatro que apresentam discussões relativas a trilhas matemáticas e Modelagem Matemática.

Nenhum filtro foi utilizado para refinar os resultados. A busca nas três plataformas foi realizada no mês de janeiro de 2024.

c) Definição da forma da extração.

Inicialmente houve a leitura dos títulos e resumos para uma pré-seleção, com a posterior leitura integral dos trabalhos que se enquadraram nos critérios da pesquisa.

A tabela 1 apresenta os dados levantados a partir das etapas 1 e 2:

Tabela 1: Dados relacionados às etapas 1 e 2

Etapa	Google Acadêmico	CAPES	ICTMA 17	ICTMA 18	ICTMA 19
Estudos encontrados	58	1	1	1	2
Estudos que citam trilhas matemáticas, mas não aprofundam elementos da Modelagem Matemática	16	0	0	0	0
Estudos que citam Modelagem Matemática, mas não aprofundam elementos sobre trilhas matemáticas	10	1	0	0	0
Sem acesso ao texto na íntegra	17	0	0	0	0
Restantes	15	0	1	1	2

Fonte: Autoria própria (2024)

Etapa 3: Obtenção dos resultados

Para a obtenção dos resultados organizamos esta etapa em dois momentos, quais sejam: (i) buscar elementos que sugerem interfaces entre trilhas matemáticas e a Modelagem Matemática em cada trabalho; (ii) organizar e classificar dimensões de acordo com as interfaces evidenciadas entre trilhas matemáticas e Modelagem Matemática.

Para tanto, inicialmente classificamos os estudos encontrados por códigos, utilizando G seguido de números sequenciais ($G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8, G_9, G_{10}, G_{11}, G_{12}, G_{13}, G_{14}, G_{15}$) para representar os trabalhos elencados pelo Google Acadêmico; e I numerado com o número da edição e em sequência crescente ($I_{17,1}, I_{18,1}, I_{19,1}, I_{19,2}$) para representar os trabalhos do livro do ICTMA. Alguns trabalhos do ICTMA também foram encontrados no Google Acadêmico, entretanto optamos por apresentá-los apenas como ICTMA por conseguirmos ilustrar de forma mais específica a fonte original.

No Quadro 1 apresentamos os códigos estabelecidos e os respectivos autores dos trabalhos, visando contribuir na organização, classificação e análise posterior.

Quadro 1: Autores e códigos dos trabalhos analisados

Código	Autoria (ano)	Código	Autoria (ano)
G ₁	LUDWIG; JABLONSKI (2019)	G ₁₁	NURIM, JUNAEDI; CAHYONO (2023)
G ₂	CAHYONO <i>et al.</i> (2020)	G ₁₂	LUDWIG, JABLONSKI (2019)
G ₃	LUDWIG, JABLONSKI (2021)	G ₁₃	JABLONSKI, BAKOS (2022)
G ₄	JABLONSKI (2023)	G ₁₄	JABLONSKI (2023)
G ₅	JABLONSKI, LUDWIG, ZENDER (2018)	G ₁₅	HAAS <i>et al.</i> (2020)
G ₆	BUCHHOLTZ <i>et al.</i> (2020)	I _{17,1}	BUCHHOLTZ (2017)
G ₇	LUDWIG, JABLONSKI (2021)	I _{18,1}	GURJANOW; LUDWIG (2020)
G ₈	BUCHHOLTZ (2020)	I _{19,1}	HARTMANN; SCHUKAJLOW (2021)
G ₉	JABLONSKI (2022)	I _{19,2}	BUCHHOLTZ (2021)
G ₁₀	BUCHHOLTZ (2021)		

Fonte: Autoria própria (2024)

Na próxima seção apresentaremos os resultados obtidos, referentes aos dois momentos citados anteriormente. Inicialmente serão descritas as dimensões identificadas e que permitem estabelecer as interfaces entre trilhas matemáticas e Modelagem Matemática. Em seguida realizaremos a discussão de cada uma dessas dimensões, buscando elucidar elementos que as caracterizam e que mostram a interface entre a Modelagem Matemática e as trilhas matemáticas.

Apresentação e discussão dos resultados

Da exploração realizada identificamos aspectos comuns tanto às trilhas matemáticas quanto à Modelagem Matemática. Um olhar atento e cuidadoso para esses aspectos levou à organização dos dezenove trabalhos em quatro grupos, constituindo-se o que denominamos de dimensões da interface entre as trilhas matemáticas e a Modelagem Matemática. Esses quatro grupos, portanto, retratam a distribuição dos trabalhos segundo características por nós identificadas e foram assim nominados: *problema com referência no mundo real, uso da tecnologia, ações requeridas e participação dos alunos*.

A descrição dos aspectos que caracterizam cada uma das dimensões e que, portanto, possibilitaram alocar os trabalhos nelas, segue apresentada por meio do Quadro 2.

Buscaremos agora, empreender uma discussão fundamentada no referencial adotado na qual, apresentamos um olhar sobre o que se revela de cada dimensão individualmente.

Quadro 2: Descrição dos aspectos contemplados nas dimensões estabelecidas

Dimensão	Descrição
Problema com referência no mundo real	Trabalhos que congregam argumentações acerca da natureza ou características de um problema advindo a interface entre Modelagem Matemática e trilhas matemáticas. Tais problemas encontram-se relacionados ou são evidenciados a partir de situações ou contextos realistas, ligados ao cotidiano ou circunstâncias da vida, bem como a um objeto real, este último localizado fora da sala de aula, ao ar livre.
Uso da tecnologia	Trabalhos que reforçam o papel da tecnologia na interação entre atividades de modelagem e trilhas matemáticas, ou, mais especificamente, para resolver o problema suscitado dessa interação.
Ações requeridas	Estudos em que ficam subentendidas ações necessárias a serem desenvolvidas em atividades que consideram a interface entre Modelagem Matemática e trilhas matemáticas, muitas delas associadas às etapas do ciclo de modelagem.
Participação dos alunos	Trabalhos que exploram o papel dos alunos em atividade com essa configuração (interface entre Modelagem e trilhas).

Fonte: Autoria própria (2024).

O fato de os alunos, muitas vezes, terem que lidar com problemas artificiais; em que o conteúdo de matemática não tem relação com a sua vida cotidiana ou futura, ou aqueles que se baseiam apenas em livros didáticos, em que alunos aprendem matemática principalmente por imitação e repetição; tem sido apontado como um dos fatores que os levam a não estarem interessados em matemática e, portanto, sentirem-se entediados ou não gostarem das aulas de matemática (G₁₅, I_{19,1}).

Essa, também, tem sido a justificativa que respalda a dimensão *problema com referência no mundo real*, a qual denota que, tanto na Modelagem Matemática quanto em trilhas matemáticas, o que fomenta a atividade é um problema, com a particularidade de ter referência no mundo real. Por mundo real, alocamos/agrupamos compreensões que abrangem contextos realistas (G₆, I_{17,1}, I_{19,2}), ambiente ao ar livre (G₂, G₃, G₄, G₅, G₇, G₉, G₁₁, G₁₂, G₁₃, G₁₄, G₁₅, I_{18,1}, I_{19,2}), contato com um objeto real (G₁, G₃, G₄, G₅, G₆, G₈, G₉, G₁₀, G₁₃, G₁₄, G₁₅, I_{17,1}, I_{19,1}, I_{19,2}), situações diárias ou cotidianas (G₁, G₂, G₁₀, G₁₁, I_{19,1}), circunstâncias associadas à vida do sujeito (G₁, G₂, G₁₀, G₁₁, G₁₃, G₁₅, I_{19,1}). Logo, nos trabalhos investigados, aponta-se que problemas e situações do mundo real podem promover uma melhor compreensão dos ambientes de vida dos alunos (G₁₅), aplicar a matemática numa perspectiva do que lhes é útil (G₁₀) e, com isso, melhorar o interesse e a percepção da importância da matemática pelos alunos (I_{19,1}).

Ainda, há uma grande ênfase no que caracteriza a trilha matemática: a necessidade de desenvolver a resolução do problema “no local” em que o objeto está localizado e a situação foi problematizada, ao ar livre, fora da sala de aula. Embora em Modelagem Matemática isso não seja uma regra, pois “para reforçar a ligação entre o mundo real e a matemática, as tarefas escolares incluem por vezes fotografias de objetos do mundo real ou vídeos de situações do mundo real” (I_{19,1}). No entanto, problemas do mundo real podem ser apresentados não apenas na sala de aula, mas também fora dela. Diante disso, há o indicativo de que, em atividades ao ar livre, no ambiente externo à sala de aula, os alunos poderiam movimentar-se pelo objeto, interagir com ele e visualizá-lo de múltiplas perspectivas (G₃, G₇), estabelecendo conexões entre matemática e realidade (palpável) (G₁₄) o que poderia “motivar

os alunos mais do que resolver os mesmos problemas dentro de suas salas de aula regulares" (I_{19,1}).

Se por um lado, na dimensão *problema com referência no mundo real*, alguns trabalhos focam no aspecto "mundo real", por outro lado alguns trabalhos buscam trazer à ênfase o entendimento de "problema". A resolução de problemas descreve o trabalho em tarefas para os quais os alunos ainda não têm uma solução (G₁₄). De modo geral, "o problema de modelagem deriva da realidade" (G₅), uma ideia central das trilhas é que os alunos resolvam problemas junto ao objeto real (I_{17,1}) e, ainda, o potencial das trilhas para a Modelagem Matemática é o fato de que "os participantes entram em contato com problemas realistas que destacam a utilidade da matemática e ampliam a possibilidade de estabelecer conexões entre a matemática e a realidade" (G₃). Ou seja, a resolução de problemas, representa a base para que atividades de modelagem matemática, tarefas de trilhas matemáticas, individualmente ou na interação entre elas, ocorram.

A promoção de atividades de modelagem matemática mediadas pelas trilhas matemáticas, sinaliza que a referência na realidade é que desencadeia o problema matemático a ser estudado. Assim, "os alunos podem resolver problemas matemáticos que se referem a objetos reais" (I_{19,1}), ainda "a matemática deve ser descoberta e experimentada através de problemas matemáticos, que se baseiam em exemplos reais de situações da vida cotidiana e devem ser resolvidos no local" (G₁) e requer que os "alunos resolvam tarefas e problemas matemáticos em objetos específicos na cidade ou nos arredores por estimativa ou medição de tamanhos realistas" (I_{17,1}).

Por se tratar de problemas matemáticos com caráter realista, ou seja, com referência no mundo real, esse tipo de problema tem uma "forma aberta de aprendizagem" (G₇) e são tidos como "complexos, abertos e autênticos" (I_{19,1}). Esse formato de problema, comum à Modelagem e às trilhas, de certa forma, deve permitir aos alunos assumir diferentes encaminhamentos na tentativa de resolvê-los, contando para isso com diferentes aparatos como fita métrica, régua, caderno para anotações, calculadora, barbante e equipamentos eletrônicos, por exemplo.

A proposição de problemas, em atividades de modelagem mediadas pelas trilhas matemáticas, tem sido realizada por meio do *MathCityMap*, conforme descrito por G₁, G₃, G₄, G₇, I_{19,1}, que consiste em um sistema integrado por dois componentes - o portal web e o aplicativo para dispositivos móveis - os quais, por sua vez, apresentam funcionalidades diferentes. De modo geral, no portal *web* é possível criar e compartilhar tarefas e trilhas, enquanto o aplicativo para *smartphones* permite ao usuário acessar as tarefas com o intuito de solucioná-las. Ademais, por meio de indicações via satélite, o aplicativo serve como um guia, direcionando os usuários até a posição geográfica na qual o objeto utilizado para a elaboração da tarefa matemática está situado. Por ser considerado, atualmente, uma das formas mais recorrentes de desenvolver trilhas matemáticas ao ar livre, o *MatchCityMap* constitui o principal elemento que desencadeia as discussões acerca da dimensão *uso da tecnologia*.

Estudos como o apresentado em G₁, G₂, G₁₀ e G₁₁, por exemplo, sinalizam que o uso de tecnologias, ou ferramentas digitais, como dispositivos móveis, *tablets*, *smartphones*, entre outros, além de ser uma realidade nas salas de aula, podem servir de aliados do processo de ensino. Logo, na dimensão *uso da tecnologia*, sinaliza-se que na interface entre a Modelagem e as trilhas, a tecnologia auxilia/apoia os alunos (G₂, G₄, G₉, G₁₁), os professores (G₄, G₁₁), bem como o processo de aprendizagem ao resolverem a tarefa (G₆, G₇, I_{19,2}). Esse auxílio, ajuda ou

apoio, se concretiza, por exemplo, por meio do *feedback* sobre uma determinada resposta, cálculos ou solução inserida (G_3, G_4, G_6, G_8). O *feedback*, por sua vez, possibilita a validação (ou não) da resposta, da solução ou dos cálculos realizados (G_3, G_9). Ainda, o uso de tecnologias em sala de aula pode influenciar interesses e emoções dos alunos ($I_{19,1}$). Particularmente o *MathCityMap*, tecnologia que orienta o desenvolvimento das trilhas, tem como finalidade apresentar os problemas aos alunos, fazê-los se movimentar pela trilha, bem como ajudá-los com dicas nas respostas. Ou seja, de modo geral, a tecnologia contribui para o desenvolvimento de atividades de modelagem mediadas pelas trilhas matemáticas e encaminha possíveis ações para a realização dessas atividades de forma bem-sucedida.

Estudos como G_1, G_2, G_3, G_4, G_7 e G_{13} investigam como algumas etapas do ciclo de Modelagem Matemática são requeridas quando os alunos se envolvem com trilhas matemáticas. Outros, embora não associem à teoria relativa ao entendimento de ciclo, indicam ações necessárias que são comuns no desenvolvimento de atividade de modelagem e de trilhas. Logo, a dimensão *ações requeridas* revela que, na interface entre Modelagem Matemática e trilhas matemáticas, existem ações comuns que contribuem para o (bom) desenvolvimento das atividades propostas, sejam elas: estruturação e simplificação, matematização, construção do modelo, interpretação e validação.

A estruturação, que geralmente vem associada à simplificação, é requerida pois, “fazer matemática em objetos reais leva os alunos, de forma natural, a estruturar e simplificar uma tarefa” (G_1). Embora o mundo real não possa ser perfeitamente descrito por um modelo matemático (G_3), a simplificação, indicada por $G_1, G_2, G_3, G_6, G_7, G_{10}, G_{13}$ e $I_{19,2}$, consiste em identificar e selecionar as informações ou dados, acerca da situação real, que serão importantes e úteis (G_2, G_3, G_7) e, assim, trabalhar com melhor precisão no desenvolvimento da atividade. A simplificação é necessária, pois, quando lidamos com problemas associados ao mundo real, as informações são indiscriminadas e “o mundo real obriga os alunos a fazer simplificações apropriadas, escolher entre todos os dados possíveis e fazer as medições reais” (G_3).

A ação matematização, definida por G_{10} como processos de descrição da realidade para a matemática, pode estar associada ao mundo real (G_7), a situação real (G_2, G_3), ao contexto ou ao modelo real (G_1) que se liga à matemática emergente. Além disso, a matematização envolve, de modo geral, a tradução da situação real simplificada em modelos matemáticos (G_1, G_3, G_7, G_{11}), sendo assim, uma ação necessária no contexto de atividades com modelagem e trilhas.

A construção do modelo real (G_1, G_6, I_4) ou modelo matemático ($G_1, G_2, G_3, G_7, G_{13}, I_{17,1}, I_{19,1}$) trata da capacidade de analisar ou comparar determinados modelos investigando as suposições feitas, verificando as propriedades e o escopo de um determinado modelo (G_3). Particularmente, com modelo matemático os alunos trabalham matematicamente e interpretam os resultados, a tarefa pode ser resolvida de diferentes maneiras. Destarte, diferentes modelos matemáticos podem ser usados para resolver o problema (G_3).

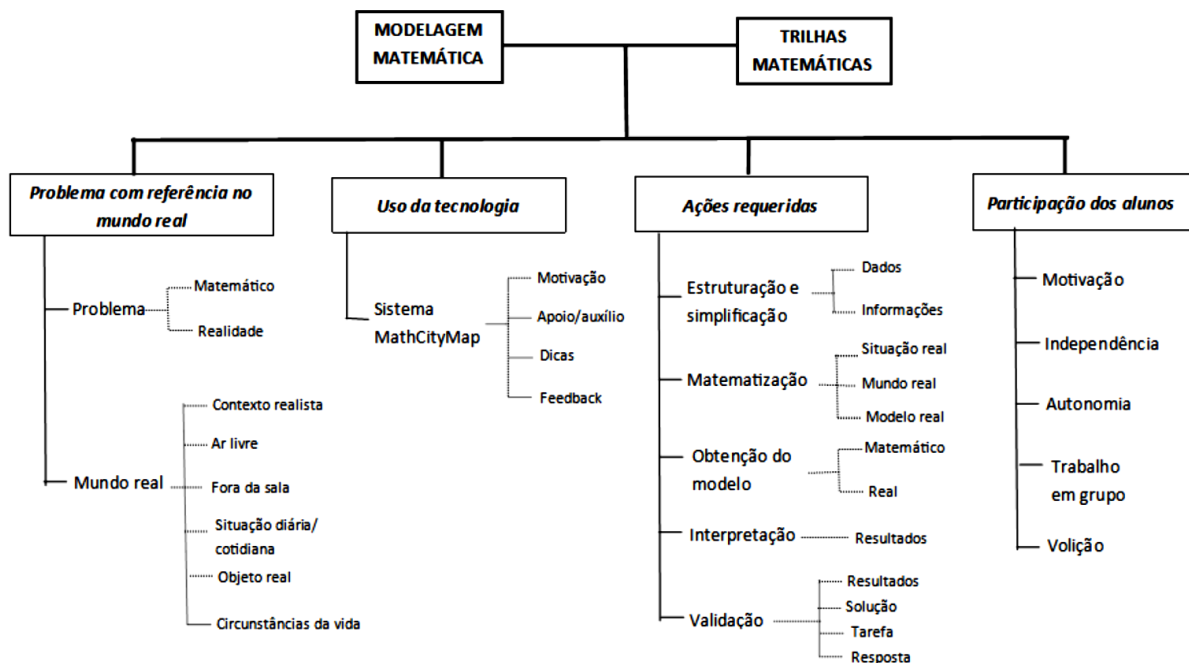
A interpretação matemática dos resultados ($G_2, G_3, G_6, I_{17,1}, I_{19,1}$) denota que os envolvidos com tarefas dessa natureza precisam, mais do que estabelecer valores a partir de cálculos, interpretar o significado matemático para uma situação do mundo real, o que conduz à ação validação. A validação, que pode ser relativamente à solução (G_1, G_4), à tarefa (G_3), aos resultados ($G_3, G_4, G_6, G_{10}, I_{19,2}$) ou à resposta ($I_{18,1}$). A validação pode dar-se em relação à “coerência e adaptação dos resultados em relação à situação real” (G_3) e “determina se os alunos precisam modificar seu modelo e seguir em frente” ($I_{18,1}$). Ainda, por se tratar de uma

tarefa de origem no mundo real, possibilitam uma validação realista, no sentido de provar a confiabilidade do resultado através de dados reais (G_3).

Por fim, na dimensão *participação dos alunos*, os trabalhos abordam aspectos relacionados à forma como o aluno participa de atividades de modelagem e de trilhas matemáticas, dentre eles, destacam-se a independência (G_1 , G_6 , G_7 , $I_{17,1}$, $I_{18,1}$), a autonomia (G_7 , $I_{17,1}$, $I_{19,2}$), a motivação (G_1 , G_2 , G_6 , G_7 , G_{15} , $I_{19,1}$) e a volição (G_3). A participação independente sugere que “os grupos são independentes entre si e também bastante independentes do professor” (G_7), particularmente ao que diz respeito às decisões que eles devem assumir; aos dados que irão coletar no local da tarefa; à utilização dos dispositivos móveis para percorrer as trilhas e, se necessário, para pedir ajuda. Conforme enfatiza G_7 , em particular, a aprendizagem autônoma ainda determina o próprio ritmo dos alunos, ou seja, o desenvolvimento da solução, o processo de decisão e a organização das ações cabe aos alunos. Ainda, tanto em Modelagem Matemática quanto nas trilhas, bem como na interseção entre elas, o trabalho em grupo deve ser considerado, tendo em vista serem atividades de cunho colaborativo (G_6 , G_{11} , I_2 , $I_{19,2}$). Essa perspectiva do modo como os alunos participam e se envolvem nesse tipo de atividade revela, em parte, o potencial para tarefas de modelagem, o uso da aprendizagem móvel, o papel da incorporação do sistema *MathCityMap* para o trabalho com trilhas ao ar livre, e seu impacto empírico no desempenho e motivação dos alunos.

Em face ao cenário previamente descrito, por meio da Figura 1, ilustramos os principais elementos relacionados com as dimensões estabelecidas e que possibilitam caracterizar a interface entre Modelagem Matemática e trilhas matemáticas ao ar livre.

Figura 1: Dimensões da interface entre Modelagem Matemática e Trilhas matemáticas



Fonte: Autoria própria (2024)

Por fim, é importante destacar que, embora essas dimensões possam ser percebidas de maneira individual, no contexto geral da Modelagem Matemática e trilhas matemáticas, elas coexistem e se inter-relacionam. Em práticas específicas, no entanto, pode ser desafiador diferencia-las ou percebê-las de maneira isolada.

Considerações finais

Ao retomarmos nosso objetivo, que consiste em investigar diferentes dimensões da interface entre Modelagem Matemática e trilhas matemáticas, mediadas pelo sistema *MathCityMap*, tecemos algumas considerações a partir das discussões empreendidas ao longo deste trabalho.

Embora estudos que tratem da interface entre a Modelagem Matemática e as trilhas matemáticas ainda sejam recentes, é possível perceber que eles já representam contribuições para a área da Educação Matemática.

Da leitura do material selecionado e do estudo sobre a forma como consideram a Modelagem Matemática e as trilhas matemáticas, na sua individualidade e na relação que estabelecem entre elas, foi possível traçar alguns elementos que as aproximam e, assim, delimitar o que chamamos de dimensões. Tais dimensões, denominadas *problema com referência no mundo real*, *uso da tecnologia*, *ações requeridas* e *participação dos alunos*, revelam, de forma mais objetiva, as interfaces entre a Modelagem Matemática e as trilhas matemáticas, sendo que elas ora estão particularizadas, ora estão intrincadas.

A título de exemplificação sobre o entrelaçamento de aspectos referentes a duas ou mais dimensões, tomemos como exemplo algumas informações que se encontram em G2. Este estudo relata que, a partir do uso do recurso *MathCityMap*, os alunos são orientados a realizar o próximo passo que consiste em resolver problemas do mundo real usando ou construindo modelos matemáticos e, para isso, precisam interpretar a situação real, a matemática utilizada na resolução e se as soluções obtidas satisfazem ao mundo real. Assim como G₂, o trabalho I_{17,1} também traz considerações semelhantes ao afirmar que “os alunos são frequentemente confrontados com desafios e dificuldades específicos quando resolvem tarefas de aplicação do mundo real na educação matemática, uma vez que o passo fundamental entre o contexto real de uma tarefa e a sua solução matemática – a chamada matematização – requer competências na apresentação de resultados matemáticos adequados e interpretação dos resultados em relação à situação problemática”. Em ambos os trabalhos podemos perceber a interação entre a dimensão *problema com referência no mundo real* (resolver problemas do mundo real) e a dimensão *ações requeridas* (usando ou construindo modelos matemáticos, interpretar a situação real e validar as soluções). Em G₂, particularmente, essas duas dimensões somam-se a dimensão *uso da tecnologia* (uso do *MathCityMap*), enquanto em I_{17,1}, podemos perceber indícios da dimensão *participação dos alunos* em interação com as duas outras dimensões supracitadas.

Outro exemplo pode ser assumido a partir das considerações de G₁₁ e G₁₃, respectivamente, “aplicar matemática no mundo real apoia os alunos a pensar criticamente, comunicar e colaborar, bem como pode fomentar seu interesse pela matemática” e “ao resolver tarefas ao ar livre, tomando como referência o mundo real, os alunos desempenham papel central no processo de aprendizagem”, sinalizam a interlocução entre a dimensão *problema com referência no mundo real* e a dimensão *participação dos alunos*.

A interlocução entre as dimensões *uso da tecnologia* e *participação dos alunos* destaca o potencial do uso das tecnologias, neste caso do *MathCityMap*, tanto por constituir-se objeto de motivação entre os alunos (a aprendizagem se tornou mais atrativa quando os alunos utilizam dispositivos móveis (G2)), quanto por servir para facilitar a orientação das tarefas, a resolução matemática e a validação dos resultados nas atividades propostas (a ferramenta digital, por meio do uso do *smarthphone*, pode ajudar os alunos a compreender e desenvolver o processo de Modelagem mediado pelas trilhas matemáticas (G4)).

Dependendo do olhar e da interpretação do leitor, do pesquisador, outras interlocuções podem ser evidenciadas nos textos que subsidiam nosso estudo.

Além disso, para além das dimensões estabelecidas, ainda cabe destacar elementos significativos, provenientes do estudo realizado. Um deles é o fato de que, tanto a Modelagem Matemática, quanto as trilhas matemáticas assumem que “a realidade e a matemática estão diretamente ligadas por meio de processos interativos de desenvolvimento e otimização de ideias e estratégias para resolver problemas utilizando para isso conhecimentos Matemáticos” (G3). Assim, esse “diálogo” entre matemática e mundo real é o fator substancialmente de destaque em todos os trabalhos analisados. Ainda que uma atividade de modelagem matemática, ao caracterizar-se por ter origem em uma situação do mundo real, esta não necessariamente deva ser desenvolvida ao “ar livre”, conforme é a proposta das trilhas matemáticas. Porém, autores que desenvolvem atividades de modelagem matemática fora da sala de aula argumentam que as oportunidades de estabelecer conexões entre a matemática e a realidade aumentam, possibilitando que os alunos ampliem sua própria perspectiva, interajam, até mesmo com os detalhes, do objeto real, conforme sinaliza G_{14} . Isso vai ao encontro do que Vygotsky afirmava, isto é, que “a educação é tão sem sentido fora do mundo real quanto um fogo sem oxigênio ou respirar no vácuo” (VYGOTSKY, 1997, p. 345). Ou seja, quanto mais os contextos de ensino debruçarem-se sobre o mundo real, mais dinâmico e robusto será o processo educacional.

Além de defender um ensino de matemática com referência no mundo real, a proposta de associar a Modelagem Matemática às trilhas matemáticas, sinaliza que o ciclo de modelagem matemática pode servir para orientar o desenvolvimento das trilhas, pois, assim como na Modelagem, uma tarefa de trilha requer que o aluno colete informações, faça simplificação, realize a matematização, a validação e a interpretação dos resultados no contexto do mundo real, conforme indicam trabalhos como G_3 , G_4 e G_{10} .

De modo geral, este estudo catalisa, compila e sintetiza discussões significativas, reconhecendo o que já se tem produzido e revelam a interface entre Modelagem Matemática e trilhas matemáticas. Além disso, avança no sentido de evidenciar as dimensões dessa interface, oportunizando pesquisas e práticas futuras estruturadas por meio de uma abordagem direcionada, alinhada com os objetivos e finalidades das tarefas a serem desenvolvidas.

Algumas considerações dos autores podem ser tomadas em mais de uma dimensão, pois abarca elementos que possibilitam essa interação. Se assim o considerarmos, estudos futuros podem investir em pesquisar a teia constituída a partir das relações estabelecidas entre as dimensões evidenciadas. Ainda, tais dimensões podem servir de base para que, estudos futuros se dediquem a investigar como elas aparecem e subsidiam práticas mediadas pela interface entre Modelagem Matemática e trilhas matemáticas.

Referências

ALMEIDA, L. M. W.; CASTRO, É. M. V. O planejamento como estratégia metacognitiva em atividades de modelagem matemática. *Revista Espaço Pedagógico*, Passo Fundo, v. 30, e14922, 2023. DOI: <https://doi.org/10.5335/rep.v30i0.14922>.

BUCHHOLTZ, N. How Teachers Can Promote Mathematising by Means of Mathematical City Walks. In: STILLMAN, G., BLUM, W., KAISER, G. (Eds) *Mathematical Modelling and Applications*.

International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling. Springer, p. 49-58, 2017. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-62968-1_4.

BUCHHOLTZ, N. Modelling and Mobile Learning with Math Trails. In: LEUNG, F. K. S.; STILLMAN, G. A.; KAISER, G.; WONG, K. L. (Eds) *Mathematical Modelling Education in East and West*. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling. Springer, p. 331-340, 2021. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6_28.

BUCHHOLTZ, N. The Norwegian Study Math & The City on Mobile Learning with Math Trails. In: LUDWIG, Matthias; JABLONSKI, Simone; CALDEIRA, Amélia; MOURA, Ana (Eds.). *Research on Outdoor STEM Education in the digiTal Age*. Proceedings of the ROSETA Online Conference. 2020, jun., p. 79-86. DOI: <https://doi.org/10.37626/GA9783959871440.0.10>.

BUCHHOLTZ, N., OREY, D. C.; ROSA, M. Mobile Learning of Mathematical Modelling with Math Trails in Actionbound. In: WORLD CONFERENCE ON MOBILE, BLENDED AND SEAMLESS LEARNING, 2020. *Proceedings* [...], 2020. p. 81-84. Disponível em: <https://www.learntechlib.org/p/218891/>. Acesso em: 02 fev. 2024.

BUCHHOLTZ, N. Students' modelling processes when working with math trails. *Quadrante*, v. 30, n. 1, p. 140-157, 2021. DOI: <https://doi.org/10.48489/quadrante.23699>.

CAHYONO, A. N. *et al.* Learning mathematical modelling with augmented reality mobile math trails program: how can it work? *Journal on Mathematics Education*, v. 11, n. 2, p. 181-192, 2020.

FERREIRA, N. S. A. As pesquisas denominadas "estado da arte". *Educação e Sociedade*, n. 79, p. 257- 272, 2002.

FERRI, R. B. *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer, 2018.

GALVÃO, M. C. B.; RICARTE, I. L. M. Revisão sistemática da literatura: conceituação, produção e publicação. *Logeion: Filosofia da Informação*, Rio de Janeiro, RJ, v. 6, n. 1, p. 57-73, 2019.

GURJANOW, I; LUDWIG, M. Mathematics Trails and Learning Barriers. In: STILLMAN, G., KAISER, G.; LAMPEN, C. E. (Eds) *Mathematical Modelling Education and Sense-making*. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling. Springer, p. 265-276, 2020. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-37673-4_23. 2024.

HAAS, B.; KREIS, Y.; LAVICZA, Z. Connecting the real world to mathematical models in elementary schools in Luxemburg. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, v. 40, n. 2, p. 1-6, 2020.

HARTMANN, L. M; SCHUKAJLOW, S. Interest and emotions while solving real-world problems inside and outside the classroom. In: LEUNG, F. K. S.; STILLMAN, G. A.; KAISER, G.; WONG, K. L. (Eds) *Mathematical Modelling Education in East and West*. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling. Springer, pp. 153-164, 2021.

JABLONSKI, S.; LUDWIG, M.; ZENDER, J. Task quality vs. task quantity. A dialog-based review system to ensure a certain quality of tasks the MathCityMap web community. In: ERME TOPIC CONFERENCE MATHEMATICS EDUCATION IN THE DIGITAL AGE, 5., 2018, Copenhagen. *Proceedings* [...] Copenhagen, 2018. p. 115 - 122.

- JABLONSKI, S. Mathematical reasoning outside the classroom – A case study with primary school students solving math trail tasks. *In: CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION*, 12, 2022, Bozen-Bolzano. *Proceedings [...]* Bozen-Bolzano, 2022. p. 2-9.
- JABLONSKI, S. Digital Support of Mathematical Modelling: The Role of Hints and Feedback in MathCityMap. *In: LUDWIG, Matthias; BARLOVITS, Simon; CALDEIRA, Amélia; MOURA, Ana (Orgs.). Research On STEM Education in the Digital Age*. Proceedings of the ROSEDA Conference. 2023. p. 115 - 122. WTM.
- JABLONSKI, S. Real objects as a reason for mathematical reasoning – A comparison of different task settings. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, v. 18, n. 4, 2023.
- JABLONSKI, S.; BAKOS, S. A helping hand in outdoor mathematics – The role of gestures in mathematics trails. *In: FERNÁNDEZ, C. et al. (Eds.). Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Alicante: PME, v. 3, 2022, p. 3-10.
- LUDWIG, M.; JABLONSKI, S. Doing Math Modelling Outdoors - A Special Math Class Activity designed with MathCityMap. *In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON HIGHER EDUCATION ADVANCES*, 5., 2019, València. *Proceedings [...]* València, 2019, p. 10-19.
- LUDWIG, M.; JABLONSKI, S. Haciendo matemáticas al aire libre con MathCityMap. *In: Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*, 19, Coruña. *Proceedings [...]* Coruña, 2019, p. 1-10.
- LUDWIG, M.; JABLONSKI, S. The potential of outdoor mathematics in a digital context. *In: ASIAN TECHNOLOGY CONFERENCE IN MATHEMATICS*, 26., 2021, Virtual, Online. *Proceedings [...]* virtual, online, 2021. p. 241-255.
- LUDWIG, M.; JABLONSKI, S. Step by step: simplifying and mathematizing the real world with MathCityMap. *Quadrante*, v. 30, n. 2, p. 242-268, 2021. DOI: 10.48489/quadrante.23604.
- NURIM, N. S.; JUNAEDI, I.; CAHYONO, A. N. Designing Math Trails-based Hypothetical Learning Trajectory to Promote Students' Numeracy Skill. *International Conference on Science, Education and Technology*, v. 9, n. 1, p. 560-566, 2023.
- ROCHA, F. G.; NASCIMENTO, B. A. R.; NASCIMENTO, E. F. V. C. do. Um modelo de mapeamento sistemático para a educação. *Cadernos da Fucamp*, v. 17, n. 29, p. 1-6, 2018.
- VYGOTSKY, L. S. *Educational Psychology*, St. Lucie Flórida. 1997.
- ZARPELON, E.; COLOMBO, J.; SOUTO, G. Trilhas Matemáticas e Metodologias Colaborativas: possíveis conexões. *Boletim GEPEN*, n. 80, p. 61-81, 2022.