

Tecnologias digitais e modelagem matemática: interlocuções e possibilidades

Digital Technologies and Mathematical Modelling: Interlocutions and Possibilities

Lourdes Maria Werle de Almeida¹
Jeferson Takeo Padoan Seki²
Élida Maiara Veloso de Castro³

Resumo

O artigo apresenta resultados de uma investigação relativa a implicações do uso de tecnologias digitais na configuração de atividades de modelagem matemática. O quadro teórico é referente à tecnologia digital e sua relação com a modelagem. Atividades de modelagem realizadas por estudantes em dois contextos educacionais são analisadas. O movimento analítico tem natureza descritiva e interpretativa, seguindo pressupostos da pesquisa qualitativa. Considerando as metáforas de Vince Geiger relativas à tecnologia na matemática, dois usos distintos são identificados. Em uma atividade a tecnologia atua como parceira e as ações dos estudantes dependem do uso de ferramentas tecnológicas. Na outra eles incorporam o conhecimento tecnológico como parte estendida de seu repertório matemático, sendo a tecnologia integrada ao desenvolvimento da atividade de tal forma que ele só se torna possível mediante essa integração.

Palavras-chave: tecnologia digital; educação matemática; modelagem matemática.

Abstract

The article presents the results of an investigation regarding implications of using digital technologies in the configuration of mathematical modelling activities. The theoretical framework refers to digital technology and its relationship with modelling. Modelling activities carried out by students in two educational contexts are analyzed. The analytical movement is descriptive and interpretative in nature and follows the assumptions of qualitative research. Considering Vince Geiger's metaphors on the use of technology in mathematics, two distinct uses are identified. In one activity, technology act as a partner and the students' actions depends on the use of technological tools. In the other, they incorporate technological knowledge as an extended part of their mathematical repertoire, with technology being integrated into the development of the activity in such a way that it only became possible through this integration.

Keywords: digital technology; mathematics education; mathematical modelling.

¹ Universidade Estadual de Londrina | lourdes@uel.br

² Instituto Federal do Sul de Minas | jefersontakeopadoanseki@hotmail.com

³ Universidade Tecnológica Federal do Paraná | elidamaiaravc@gmail.com

Introdução

O uso de tecnologias digitais com finalidades pedagógicas tem se mostrado fonte profícua de reflexões e discussões em pesquisas e práticas pedagógicas na área de Educação Matemática. Com o aumento da disponibilidade de computadores, softwares e outras tecnologias digitais portáteis, bem como a produção de uma variedade de recursos tecnológicos direcionados para o ensino e a aprendizagem da matemática, surgem diferentes focos e tendências de pesquisa sobre a integração dessas tecnologias nas atividades da sala de aula (Borba et al., 2018; Drijvers, 2020; Engelbrecht et al., 2020)

Nesse cenário, dentre os desafios que surgem no campo educacional, está a inclusão dessas tecnologias em práticas pedagógicas que envolvem a resolução de problemas da realidade. Apesar do reconhecimento da literatura de que as tecnologias digitais potencializam aplicações da matemática em atividades de investigação e resolução de problemas por meio da visualização, manipulação e introdução de situações complexas nas aulas (Bray; Tangney, 2017), a questão sobre como explorar esses e outros potenciais das tecnologias digitais no ensino de matemática ainda carece de esforços de pesquisadores e professores (Drijvers, 2020).

No presente artigo, particularmente, interessa-nos um olhar para a integração de tecnologias digitais em práticas de sala de aula mediadas pela modelagem matemática. Neste caso, a partir da abordagem por meio da matemática, de problemas originados em uma situação da realidade, os estudantes podem propor diferentes soluções (Almeida, 2018) e valer-se da tecnologia com diferentes finalidades.

De modo geral, as tecnologias digitais podem transformar a atividade matemática de estudantes e professores e, conseqüentemente, as práticas de ensino bem como a aprendizagem da matemática (Hoyles, 2018). Tendo esse potencial transformativo das tecnologias digitais como pressuposto, dirigimos nossa atenção para como elas podem transformar a atividade matemática de estudantes quando realizam modelagem matemática. O objetivo do artigo é, portanto, investigar quais são as implicações do uso de tecnologias digitais para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em dois contextos educacionais diferentes, uma disciplina de Modelagem Matemática de um curso de Licenciatura em Matemática e um Grupo de Pesquisa e Estudo em Modelagem Matemática na Educação Matemática de um programa de pós-graduação *stricto sensu*.

Tecnologias na Educação Matemática

Existe atualmente uma diversidade de tecnologias digitais disponíveis no âmbito da área de Educação Matemática. Com o avanço tecnológico diferentes abordagens teóricas acerca dos usos e das funções didáticas das tecnologias digitais têm sido propostas e discutidas na literatura (Drijvers, 2020; Borba et al., 2018; Geiger, 2005; Hoyles, 2018).

Ao investigar como tecnologias digitais podem mediar a aprendizagem, Geiger (2005) aponta que os estudantes podem operar com elas de diferentes modos no desenvolvimento de atividades matemáticas em contextos educacionais, conforme as seguintes metáforas:

Tecnologia como guia (technology as master): o estudante é subordinado à tecnologia, caracterizando-se uma relação de dependência entre tecnologia e matemática. Se a complexidade de uso da tecnologia for alta, a atividade do estudante limita-se as operações com as quais os estudantes

são capazes de fazer. Se a compreensão matemática é ausente, o estudante limita-se ao consumo cego de qualquer resultado gerado, independente de sua precisão ou excelência. Tecnologia como assistente (*technology as servant*): a tecnologia é usada como um substituto confiável que economiza tempo para cálculos mentais ou de caneta e papel. As tarefas das aulas de matemática permanecem essencialmente as mesmas, mas agora são facilitadas por um rápido auxílio mecânico. O usuário "instrui" a tecnologia como um assistente obediente, mas "burro", no qual ele tem confiança. Tecnologia como parceira (*technology as partner*): a tecnologia é usada de forma criativa para aumentar o poder dos estudantes em relação ao seu aprendizado. Os estudantes interagem com a tecnologia, tratando-a como um parceiro humano, por exemplo, para localização e correção de erros que exigem investigação. Tecnologia como extensão de si mesmo (*technology as extension of self*): a parceria entre o estudante e a tecnologia se funde em uma única identidade, de modo que, em vez de existir como uma tecnologia de terceiros, é usada para apoiar a argumentação matemática tão naturalmente quanto os recursos intelectuais. (GEIGER, 2005, p. 371).

Essas metáforas descrevem diferentes graus de sofisticação do uso da tecnologia por professores e estudantes. Isso não quer dizer que uma vez que o indivíduo mostre que pode operar em um nível superior com as tecnologias digitais, ele o fará em todas as atividades, mas evidencia uma ampliação do repertório tecnológico com diferentes modos de operação que podem ser usados no desenvolvimento de uma atividade específica.

Em consonância com os estudos sobre a interação entre tecnologias digitais e estudantes em atividades de matemática, o construto seres-humanos-com-mídias (Borba; Villarreal, 2006) enfatiza uma relação de simbiose entre as tecnologias digitais e pensamento matemático, visando um trabalho dinâmico e com relação bidirecional entre parceiros humanos e não humanos na qual a produção de conhecimento é condicionada pelo uso da tecnologia e, desta maneira, a atividade matemática é transformada pela tecnologia.

O argumento de que as tecnologias digitais transformam a atividade matemática envolvida em práticas pedagógicas é ratificado por Hoyles (2018). Para a autora, o potencial transformativo das tecnologias digitais depende, em grande medida, de como essas ferramentas são usadas isoladamente ou combinadas entre si. A mera presença e disponibilidade dessas ferramentas, segunda a autora, produz pouca diferença nos resultados de aprendizagem dos estudantes.

Assim, olhar para o modo como as tecnologias digitais transformam a atividade matemática requer olhar para o tipo de uso que é feito dessas tecnologias e para os diferentes modos com que os estudantes interagem com elas no desenvolvimento de uma atividade específica.

Tecnologias e Modelagem matemática

As discussões aqui apontadas inserem-se em um conjunto amplo de pesquisas sobre tecnologias digitais e Modelagem Matemática na Educação Matemática e que vêm consolidando uma linha de investigação na área (Molina Toro et al., 2019; Galbraith; Fisher, 2021; Greefrath; Siller, 2017; Greefrath et al., 2018; Goulart; Almeida, 2020; Almeida; Castro; Silva, 2021; Almeida e Goulart, 2021). De modo geral, essas pesquisas sinalizam para uma

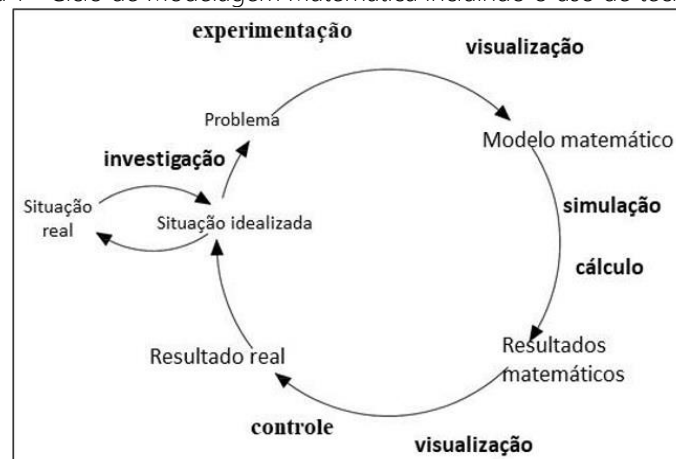
relação entre modelagem matemática e tecnologias digitais que pode ser explorada a partir de diferentes pontos de vista.

Uma atividade de modelagem matemática, em termos gerais, diz respeito à abordagem de uma situação da realidade por meio da matemática (Martens; Klüber, 2023). Essa abordagem, entretanto, se dá sobre uma idealização da situação que é realizada pelo modelador (estudante ou professor) e em que se identifica um problema a ser resolvido relativamente a essa situação (Almeida, 2022). A matematização da situação implica na definição de variáveis e de hipóteses e dela decorre uma transição de linguagens e uma indicação de como se dará o uso da matemática nessa atividade. Um modelo matemático é então construído e usado para propor uma solução ao problema definido. Os resultados obtidos passam por um processo de interpretação e validação. Caso não sejam considerados válidos, são realizados ajustes no desenvolvimento da atividade e o processo pode repetir-se até a obtenção de um modelo satisfatório (Czocher, 2018; Almeida e Kowalek, 2024; Almeida e Kowalek, 2024a).

A relação entre matemática e realidade em uma atividade de modelagem, envolve, conforme Czocher (2013), uma estruturação matemática e uma configuração pseudo-empírica da situação da realidade, delineadas com base nas experiências e conhecimentos prévios do modelador. A estruturação matemática diz respeito a como o modelador pensa matematicamente, como ele estrutura a situação. Já a configuração pseudo-empírica é uma representação da situação da realidade que operacionaliza experiências prévias do modelador em relação ao contexto da atividade de modelagem e é construída a partir de suas experiências e conhecimentos sobre a situação em estudo.

A integração de tecnologias digitais no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática tem sido realizada considerando duas abordagens, conforme apontam Molina Toro et al. (2019). A primeira é a análise de aspectos metodológicos e teóricos associados ao desenvolvimento de atividades de modelagem mediado por tecnologias digitais. Nesta abordagem, construir modelos matemáticos, validar estes modelos, construir representações gráficas são exemplos de uso da tecnologia. A segunda abordagem transcende esta visão de uso das tecnologias digitais e assume como pressuposto que a tecnologia é um componente fundamental na reorganização das formas de fazer modelagem matemática e gerar conhecimento por meio desse processo, isto é, as tecnologias digitais promovem uma reorganização no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

Figura 1 - Ciclo de Modelagem Matemática incluindo o uso de tecnologias



Fonte: Adaptado de Greefrath et al. (2018, p. 234)

A compreensão das funções que as tecnologias digitais desempenham em atividades de modelagem matemática é discutida na literatura (Ver p. e. Greefrath, 2011; Greefrath et al. 2018; Almeida; Goulart, 2021; Almeida; Castro; Silva, 2021). Uma visão reducionista, segundo Greefrath (2011), é caracterizar o uso de tecnologias digitais como apêndice do ciclo de modelagem e com funções restritas à construção do modelo matemático e à obtenção de resultados matemáticos. Em contraposição, Greefrath et al. (2018) argumentam que existem diferentes funções das tecnologias em atividades de modelagem matemática, caracterizando-as como: investigação, experimentação, visualização, realização de cálculos e controle. A Figura 1 ilustra a identificação dessas funções no ciclo de modelagem matemática.

Conforme sugere Greefrath (2011), como investigação, as tecnologias digitais podem ser usadas para a compreensão da situação da realidade, na leitura e interpretação de dados prontos bem como na produção de dados. A experimentação consiste na transformação de uma situação real em um modelo geométrico ou numérico por meio de softwares de geometria dinâmica ou planilhas eletrônicas e pode ser usada para formular e testar hipóteses e conjecturas acerca da situação da realidade. A visualização se dá na representação com a ajuda de tecnologias digitais para observar e analisar aspectos que poderiam não ser notados como ponto de partida para o desenvolvimento de modelos matemáticos ou para análise dos resultados obtidos. A simulação é uma função próxima à experimentação e pode ser caracterizada como a criação de uma analogia de uma situação real que pode ser usada para investigar uma operação ou um experimento com a ajuda de modelos matemáticos (Greefrath; Siller, 2017). A realização de cálculos consiste no uso das tecnologias digitais para realizar cálculos numéricos ou algébricos que não podem ser obtidos pelos modeladores sem as tecnologias digitais em tempo apropriado, bem como para construir representações algébricas que se adequem aos dados. Por fim, o controle possibilita controlar as informações de entrada no modelo matemático para a determinação dos valores dos parâmetros e suas consequências para os aspectos numéricos e gráficos do modelo matemático.

Almeida e Castro (2021) também apontam que o uso da tecnologia em atividades de modelagem perpassa as diferentes etapas de um ciclo de modelagem e identificam que ela pode atuar: como fonte de informação sobre a situação em estudo; como meio de visualização; como auxiliar na construção de modelos matemáticos. Além disso, dependendo dos interesses dos modeladores, a tecnologia pode ela própria ser o contexto de origem do problema, como é o caso, por exemplo, de alguns jogos virtuais.

Galbraith e Fisher (2021) argumentam que há casos em que a tecnologia digital se torna indispensável na modelagem de uma situação da realidade. Um desses casos é o seu uso de para a realização de simulações que pressupõem a elaboração de simuladores, os quais possibilitam uma interação com a situação por meio da manipulação de variáveis e parâmetros de um modelo computacional construído a partir de um modelo matemático (Greefrath; Siller, 2017).

Aspectos metodológicos

A pesquisa empírica em que se fundamentam nossas argumentações é relativa ao desenvolvimento de duas atividades de modelagem matemática mediadas por tecnologias digitais em dois contextos educacionais: uma disciplina de Modelagem Matemática em um curso de Licenciatura em Matemática; um grupo de pesquisa e estudos em Modelagem

Matemática de um programa de pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Na disciplina de Modelagem Matemática a atividade com a temática Jogo de Poker foi desenvolvida durante quatro aulas, em ambiente online e de maneira síncrona, por meio da ferramenta *Google Meet*. Os dados coletados consistem em gravações de áudios e vídeos das aulas, os arquivos das produções digitais e o relatório final produzido pelo grupo de estudantes que desenvolveu a atividade. Além dos recortes de partes do desenvolvimento da atividade que remetem ao uso de tecnologias digitais, ilustramos alguns aspectos desse uso evidenciados nos diálogos dos estudantes durante as aulas.

A atividade desenvolvida no âmbito do grupo de pesquisa tem como tema as reproduções de uma música no aplicativo Spotify. Três estudantes participaram da atividade que foi desenvolvida ao longo de um mês e o próprio grupo era responsável pela organização dos encontros e atividades (síncronas e assíncronas) conforme a necessidade. Os dados coletados para a análise provêm de transcrições das gravações de áudio e vídeo de encontros síncronos realizados pelo Skype e do relatório final produzido pelo grupo.

O processo analítico, de natureza descritiva e interpretativa, segue pressupostos da pesquisa qualitativa (Bogdan; Biklen, 2007) em dois movimentos. No primeiro, descreve-se e identifica-se os usos das tecnologias digitais nas atividades de modelagem matemática, bem como os modos como os estudantes se relacionaram com essas tecnologias. No segundo, são realizadas interpretações e inferências acerca das implicações dos usos das tecnologias para as atividades de modelagem matemática.

Atividade 1: Jogo de Poker

Figura 2 - Atividade Jogo de Poker

Poker


Situação da realidade

Aos 28 anos, o londrinese Luis Eduardo Garla competiu pelo bracelete de ouro do WSOP (World Series of Poker), o principal circuito competitivo de poker do mundo. No dia 09 de agosto de 2020, ocorreu a final do Asia Championship, a partida que valia o bracelete de ouro foi disputada entre o brasileiro Luis Garla e o grego Alexandros Theologis. Na última jogada do torneio, Theologis saiu com **2♣2♦** e o brasileiro segurava **Q♥7♦**.

Problema

A partir do par de cartas iniciais é mais provável que Garla ou que Theologis melhore a mão e vença a partida?

Informação



Hipóteses

Hipótese 1 (H1): Cada uma das combinações de cartas é equiprovável.

Hipótese 2 (H2): Cada jogador tem mais chance de ganhar com as 3 mãos que tiverem maior chance de ocorrência a partir do par inicial recebido.

Simplificações

S1: Será excluída a ação de blefe.
 S2: Não serão considerados os valores das apostas.
 S3: Ambos jogadores não poderão dar *fold* antes do *river*.

Matematização e resolução

Calculando a probabilidade de ganhar com as mãos com mais chance de acontecer (H3):


Garla	Theologis
Um par } 71,70%	Trinca } 19,93%
Dois pares } 7,51%	Quadra } 8,00%
Flush } 0,20%	Full House } 0,14%
79,21%	27,93%

Chances de vitória:

Garla	Theologis
$P(G) = P(G_1) - P(T_1)$	$P(T) = P(T_1) + P(G^c)$
$P(G) = 79,21 - 27,93$	$P(T) = 27,93 + 20,79$
$P(G) = 51,28\%$	$P(T) = 48,72\%$

Validação do resultado

A mão vencedora, com dois pares, foi a de Garla. Theologis formou dois pares (composição na qual ele tinha maior probabilidade). O modelo é satisfatório para a situação estudada. O site que simula as chances de vitória apresentam um resultado próximo ao obtido para a mesma jogada.



Generalização do modelo

Depois de calcular a probabilidade de vitória de cada mão, para cada jogador, os valores foram inseridos no Curve Expert que gerou funções por partes, que permitem calcular a probabilidade de cada jogador ganhar com qualquer uma das mãos.

$$G(x) = \begin{cases} -0,018 + 292,55 \cdot x - 337,76 \cdot x^2 + 201,93 \cdot x^3 - 68,86 \cdot x^4 + 13,84 \cdot x^5 - 1,62 \cdot x^6 + 0,102 \cdot x^7 - 0,003 \cdot x^8, & \text{se } x = 1 \text{ ou } 7 \leq x \leq 9 \\ 6,41 \cdot 10^{-12} + 127,002 \cdot x - 44,88 \cdot x^2 - 4,47 \cdot x^3 + 5,99 \cdot x^4 - 1,245 \cdot x^5 + 0,082 \cdot x^6, & \text{se } 2 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

$$T(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 1 \text{ ou } x = 6 \\ -1,07 \cdot 10^{-9} + 153,108 \cdot x - 100,49 \cdot x^2 + 38,49 \cdot x^3 - 9,414 \cdot x^4 + 1,418 \cdot x^5 - 0,116 \cdot x^6 + 0,004 \cdot x^7, & \text{se } 2 \leq x \leq 5 \text{ ou } 7 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

Fonte: os autores

Amazônia | Revista de Educação em Ciências e Matemática | v.20, n. 45, 2024. p. 144-161.

149

A atividade Jogo de Poker foi desenvolvida por um grupo de quatro estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática. A problemática que originou a investigação relaciona-se à jogada final em um torneio mundial de Poker e as chances de vencer de cada um dos jogadores finalistas, dado que são conhecidas as cartas de cada um deles. Os encaminhamentos para obter uma solução e a resposta obtida pelos estudantes são registrados na Figura 2.

Atividade 2: Reproduções de uma música no spotify

Figura 3 - Atividade de modelagem reproduções de uma música no Spotify

Reproduções de uma música no Spotify

Situação da Realidade

O Spotify é um serviço de *streaming* de música e podcast lançado oficialmente em 2008. [...] Com interesse voltado para o número de reproduções de uma música no *Spotify*, um aspecto que pode ser investigado é a projeção das reproduções de uma música qualquer no decorrer do tempo, bem como as taxas de reprodução desta música em um determinado instante, de modo a apoiar a tomada de decisões de artistas e produtores musicais.

Modelo Matemático

Em termos matemáticos, podemos escrever:

$$\frac{dS}{dt} = r \left(1 - \frac{S}{k} \right) S$$

Em que k é o limite do número de reproduções acumuladas da música e r é uma constante de proporcionalidade. Resolvendo a EDO, temos:

$$S(t) = \frac{k}{1 + be^{-r \cdot t}}$$

Sendo $r, b, k \in \mathbb{R}$ e parâmetros do modelo matemático.

Problema

Qual é o número de reproduções acumuladas de uma música lançada no *Spotify* até um instante qualquer? Em que instante essa música atingirá a taxa máxima de reprodução por semana?

Cenários hipotéticos

Cenário 1: a música é reproduzida 12500 vezes na primeira semana após o lançamento. Durante a décima semana a taxa de reprodução da música em relação ao tempo atinge o máximo, e então essa taxa decresce. Após a 25ª semana a música é mais ou menos esquecida e quase não é reproduzida mais.

Cenário 2: Música recém-lançada da lista top 200 músicas mais tocadas no *Spotify*, com dados do número de reproduções por semana nas sete primeiras semanas após o lançamento. Consideramos a música "Braba", da artista Luiza Sonza, lançada em 18/0/2020.

Variáveis

$S(t)$: número de reproduções acumuladas de uma música até um instante t .

t : tempo em semanas ($t \in \mathbb{R}, t \geq 0$).

Cenário 1

H1: Após a vigésima quinta semana do lançamento da música no *Spotify*, a taxa de reprodução da música por semana tende a zero.

H2: para $t < 10$, a taxa de reprodução da música é crescente ($S''(t) > 0$). Em $t > 10$, a taxa de reprodução da música por semana é decrescente ($S''(t) < 0$). Logo, em $t = 10$, a taxa de reprodução por semana é um ponto de máximo das taxas de reprodução ($S''(t) = 0$).

Cenário 2

H3: Após um longo período após o lançamento da música, a taxa de reprodução tende a zero.

H4: A taxa de reprodução da música é crescente até um determinado instante, e após esse instante passa a ser decrescente.

Simulações

Cenário 1

Cenário 2

Fonte: os autores

A atividade reproduções de uma música no Spotify foi realizada por três estudantes participantes de um grupo de estudo e pesquisa em Modelagem Matemática na Educação Matemática e associado a um programa de pós-graduação stricto sensu em Ensino de Ciências e Educação Matemática. A situação investigada consiste na investigação relativa ao número de reproduções em um instante qualquer de uma música lançada no Spotify. Com o

uso do software GeoGebra, foram realizadas simulações a partir de dois cenários que conduziram a elaboração de um modelo matemático, bem como a manipulação dos parâmetros desse modelo, conforme indica a Figura 3.

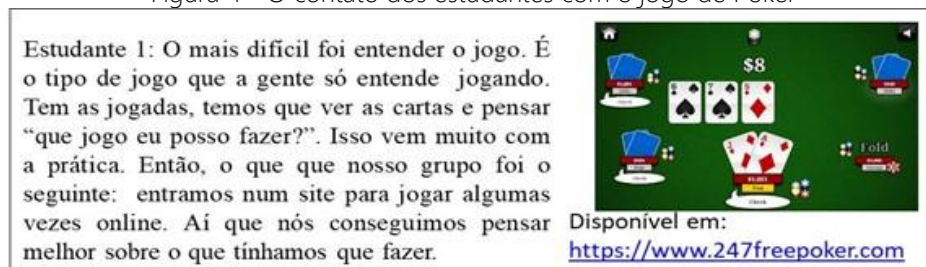
Tendo em vista os dois cenários indicados na Figura 3, simuladores foram construídos com a finalidade de determinar os parâmetros do modelo matemático e, em consequência, realizar estimativas a respeito do número de reproduções acumuladas de uma música no Spotify bem como a taxa máxima de reproduções dessa música por semana.

Resultados: o uso da tecnologia digital nas atividades de modelagem matemática

A atividade com o tema Poker emergiu da leitura de um artigo publicado em meio digital, ou seja, a informação base para a definição do problema de modelagem decorreu do uso de um recurso tecnológico: a internet. A coleta de informações sobre o tema também foi realizada utilizando-se desse meio e, consoante com o que apontam X2, este uso possibilitou refinamentos nos dados no decorrer do desenvolvimento da atividade.

De fato, a inteiração dos estudantes com o tema foi mediada por leituras complementares e pela realização de jogadas simuladas em que o usuário joga com o computador, testando diversas jogadas para compreender o funcionamento e as regras do jogo de Poker. Para os estudantes, esse uso da tecnologia foi fundamental para que a modelagem da situação pudesse ser realizada, conforme indica Figura 4.

Figura 4 - O contato dos estudantes com o jogo de Poker



Fonte: os autores

O uso de jogos digitais em atividades de modelagem matemática possibilita a criação de uma realidade virtual que simula o comportamento de situações da realidade. A simulação de jogadas permitiu aos estudantes investigar o funcionamento do jogo de Poker e delinear caminhos para resolução do problema, colocando em relevo conceitos e propriedades relativas ao cálculo de probabilidades.

A investigação e simulação, enquanto funções apontadas em Greefrath (2011) para o uso de tecnologias digitais, emergiram nessa atividade de modelagem como propulsoras da investigação uma vez que as proposições sobre o problema real foram baseadas nas simulações vivenciadas no jogo de Poker digital realizado pelos estudantes do grupo. Assim, um primeiro uso das tecnologias identificado na atividade é a simulação em um jogo digital para investigação da situação em estudo.

Para calcular a chance de vitória com cada uma das dez combinações de mãos do Poker, os estudantes usaram o software Excel para ambos os jogadores, obtendo os resultados conforme consta na Figura 5.

Figura 5 - Probabilidades das mãos do Poker para cada jogador

1	GARLA										1	6		
2	MÃO	MESA				COMENTÁRIOS	PROBABILIDADE							
3	1	Ao	Ko	Jo	10o	Assim ele com certeza vence	100%	1	1ª	0	-0,017955577	-0,01796	6,4104E-13	6,41E-13
4	2	8o	9o	10o	Jo	Caso ele saia com Straight Flush com certeza vence, já que o grego não pode formar uma mão melhor	100%	2	2ª	1	292,5514233	292,5514	127,001922	762,0115
5	2	3o	4o	5o	6o					2	-337,7635519	-337,764	-44,880843	-1615,71
6	3	Qc	Qp	Qe	-	Neste caso a chance dele perder é se nas duas cartas que não especificamos saíam um 2c e um 2o, dando ao	99%	3	2ª	3	201,9337712	201,9338	-4,4674329	-964,965
7	3	7c	7p	7e	-					4	-68,86531712	-68,8653	5,98997966	7763,014
8	4	Q	Q	7	-	A chance dele perder é caso o grego consiga formar uma quadra, ou seja, caso as duas cartas não	99%	4	2ª	5	13,84374098	13,84374	-1,244854	-9679,98
9	4	7	7	Q	-					6	-1,619761453	-1,61976	0,08210381	3830,635
10	5	Xo	Xo	Xo	-	A chance dele perder é caso o grego consiga um Full	91%	5	2ª	7	0,101917046	0,101917		
11	6	X	X	X	X	A chance dele perder é caso o grego consiga um flush,	95%	6	2ª	8	-0,002666171	-0,00267		
12	7	7	7	-	-	A chance de perder é com o grego formando uma quadra, um full house ou um flush	86%	7	1ª					
13	7	Q	Q	-	-							100,1616		95
14	8	7	Q	-	-	A chance de perder é com o grego formando uma quadra, um full house, um flush ou uma trinca	67%	8						
15	8	7	X	X	-									
16	8	Q	X	X	-									
17	9	Q	-	-	-	A chance dele perder é caso o grego forme dois pares, uma trinca, uma sequência, um flush, um full house,	6%	9	1ª					
18	9	7	-	-	-									
19														

Fonte: os autores

Neste caso, os estudantes usaram a ferramenta tecnológica para calcular a probabilidade de vitória dos jogadores e identificar possíveis erros nos resultados. Além disso, o fato de eles terem feito comentários (como consta na Figura 5) sobre a probabilidade de vitória em cada jogada, favoreceu a organização dos dados, o que segundo Geiger (2005), indica que o estudante está evoluindo para um nível mais sofisticado do uso das tecnologias.

Considerando a perspectiva de Greefrath (2018), é possível inferir que o uso do Excel foi útil para obter resultados numéricos e realizar um tratamento matemático das probabilidades de vitória em cada jogada. Assim, um segundo uso das tecnologias digitais nessa atividade é o uso de software para realização de cálculos numéricos e a identificação e correção de erros.

A partir desse tratamento matemático, os estudantes usaram outro software, o Curve Expert, para obter um modelo matemático (Figura 2) relativo à probabilidade de vitória em cada jogada e para cada jogador, conforme afirma um estudante quando da apresentação de resultados para a professora:

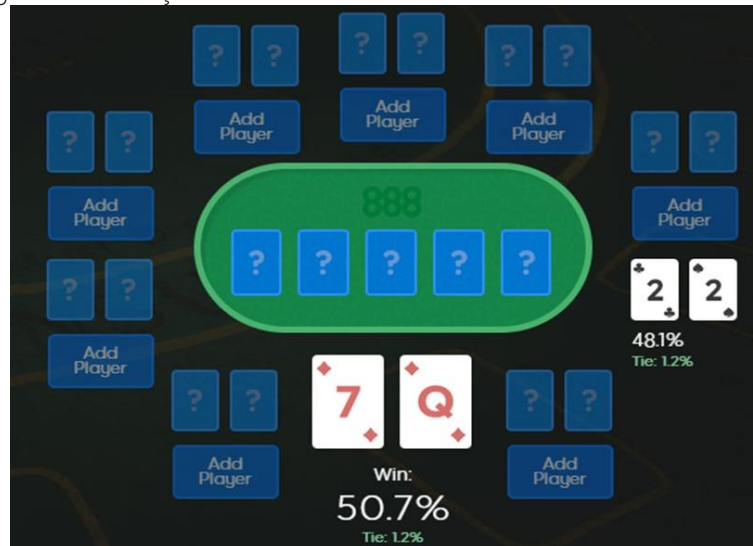
Estudante 2: No caso do jogador Garla, determinamos a função (referindo-se ao modelo matemático) no Curve Expert; primeiro porque, o software dá para nós um índice, o r (coeficiente de correlação), de quão próximo a curva está dos nossos pontos. Então ajustamos uma função, não deu certo. Inclusive você vê que a nossa função é por partes, porque a gente viu que tinha uma função que explica determinados pontos, mas já não explica outros. Então a gente excluiu os pontos que já estavam explicados, pegamos os outros pontos e ajustamos uma função de novo (Transcrição de gravação).

O uso do software Curve Expert possibilitou transformar os dados relativos à probabilidade de vitória em cada jogada em modelos matemáticos algébricos, caracterizando o que Greefrath (2011) denomina de *experimentação*, favorecendo a possibilidade de testar as hipóteses formuladas acerca da situação. Decorre, então, o uso da tecnologia para a representação gráfica e ajuste de curvas e a experimentação de possíveis curvas para associar à situação.

A validação nessa atividade, associada à função de controle apontada em Greefrath (2011), foi realizada usando os resultados obtidos nas jogadas virtuais, conforme indica a Figura 6. Ao encontro do que afirmam Molina Toro et al. (2019), esta simulação proporcionada pelo software simulando as jogadas, permitiu aos estudantes argumentar e observar uma variedade de movimentos e validar os resultados obtidos com o modelo algébrico. Nesse

processo, o simulador que calcula a probabilidade de vitória de uma jogada, exerceu as funções de simulação e controle, com a finalidade de interpretar os resultados e validar o modelo matemático.

Figura 6 - Validação dos resultados com o uso de um simulador de Poker.



Fonte: Disponível em: <https://poker.888.pt/blog/poker-calculator>.

A tecnologia contribuiu para o desenvolvimento bem-sucedido dessa atividade, constituindo-se como facilitadora em diversos momentos. Na terminologia de Geiger (2005), podemos inferir que a tecnologia digital nessa atividade atuou como parceira, tendo em vista que os estudantes interagiram com ela utilizando-a de forma criativa para aumentar o poder sobre seu próprio aprendizado. Além disso, a configuração da atividade foi sendo estruturada mediante usos da tecnologia digital de modo que ele teve funções distintas em cada etapa da atividade.

Na atividade relativa às reproduções de uma música no Spotify o uso de tecnologias digitais se deu primordialmente na construção dos simuladores. Para os dois cenários investigados, foram consideradas as variáveis $S(t)$: o número de reproduções acumuladas até o instante t , t : tempo em semanas e r, b, k números reais. O modelo matemático construído é do tipo logístico e tem a seguinte formulação matemática:

$$S(t) = \frac{k}{1 + be^{-r.t}}$$

Este modelo expressa que o número reproduções acumuladas de uma música no decorrer do tempo possui um limitante e tende a se estabilizar em k ; há um ponto de inflexão (quando $S''(t)=0$) que representa a taxa máxima de reproduções de uma música no instante t . Usando o software GeoGebra os estudantes construíram dois simuladores, cujos valores de entrada eram diferentes para cada cenário.

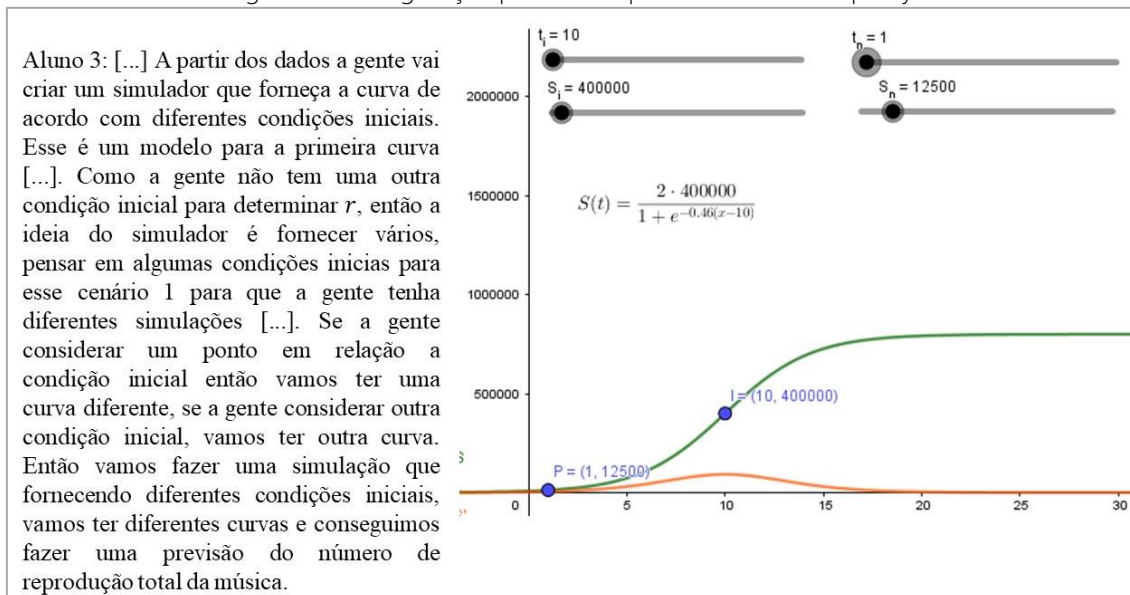
No cenário 1, as informações dizem respeito à uma situação fictícia, com uma música sendo tocada 12500 vezes na primeira semana após seu lançamento no Spotify e atingindo a taxa máxima de reprodução na décima semana. As simulações realizadas para este cenário tinham como propósito compreender a situação da realidade e delinear possíveis caminhos de resolução da situação-problema, como evidencia o excerto a seguir:

Estudante 3: uma das coisas que as pessoas fazem para realizar previsões é supor cenários possíveis de acordo com o valor dos parâmetros. Então, uma das coisas que a gente pode fazer que é relevante para o contratante do Spotify é: mostrar que se a gente tem esse valor do parâmetro r então consegue-se atingir tal valor; porque o que o r interfere? Ele interfere justamente na taxa do número de vezes que a música é ouvida em $S(1)$ para o número de vezes que é ouvida em $S(2)$, em $S(3)$. O r interfere nessa taxa de variação (Transcrição de gravação).

As simulações realizadas no cenário 1 constituem, na terminologia de Czocher (2013), uma configuração pseudo-empírica do comportamento do número de reproduções de uma música no Spotify. Essa configuração é pseudo-empírica pois a situação que está sendo modelada pode não ser diretamente observável ou o modelador pode nunca tê-la observado. No entanto, ela fornece justificativas associadas às escolhas das variáveis e as informações, bem como indica o propósito do modelo matemático para o contratante ou o produtor de uma música lançada no Spotify. Isso é evidente quando olhamos para a decisão dos estudantes de realizar projeções do número de reproduções acumuladas de uma música a partir de sua taxa de variação no decorrer das semanas, controlando os valores de entrada para o parâmetro r , considerando um ponto de inflexão e um ponto qualquer e, posteriormente, analisando o comportamento das curvas geradas.

Podemos dizer que essa configuração inicial expressa, no desenvolvimento dessa atividade, uma idealização da situação real e incorpora conhecimentos matemáticos dos estudantes sobre taxas de variação e sobre o modelo logístico (Figura 7).

Figura 7 - Configuração pseudo-empírica na atividade Spotify



Fonte: registros dos estudantes

O uso do software GeoGebra deu-se na construção de um simulador na interface do software, desempenhando as funções de visualização, experimentação e simulação na perspectiva de Greefrath (2011), Greefrath e Siller (2017). A visualização ocorreu no uso do GeoGebra para compreensão da situação. A experimentação consistiu na representação gráfica do comportamento do número de reproduções de uma música até um instante

qualquer e da taxa de variação dessas reproduções, possibilitando testar as condições hipotéticas do cenário 1. Já com a simulação deu-se a manipulação de condições iniciais e nas projeções das curvas do número de reproduções de uma música até um instante qualquer, criando uma analogia com a situação real. Essas três funções da tecnologia não podem ser caracterizadas de forma independente, uma vez que estão articuladas em uma relação de interdependência na construção do simulador.

Nesse sentido, o uso do software GeoGebra na construção do simulador teve implicações na compreensão da situação-problema e no encaminhamento matemático para sua resolução, na medida em que, por meio da visualização e experimentação, contribuiu para o que em Almeida (2018) é caracterizado como um tipo de antecipação implementada. Essa antecipação na atividade diz respeito à identificação de conhecimentos matemáticos necessários e de informações necessárias a respeito da situação para a simulação do número de reproduções de uma música até um instante qualquer.

Em síntese, no cenário 1, o uso do software GeoGebra desempenhou funções de experimentação, visualização, experimentação e simulação na constituição de uma configuração pseudo-empírica do fenômeno e na antecipação implementada de conhecimentos matemáticos e de informações necessárias para a construção de um simulador. Este simulador, entretanto, possui limitações pois requer que: para usá-lo o usuário saiba qual é a taxa máxima de reproduções da música por semana e o número de reproduções acumuladas da música em um instante qualquer; este simulador só funciona para músicas que tenham as características previstas: o número de reproduções acumuladas na semana 1 é 12500 reproduções ($S(1)=12500$) e a taxa máxima instantânea da música ocorre na semana 10 ($S'(10)=0$).

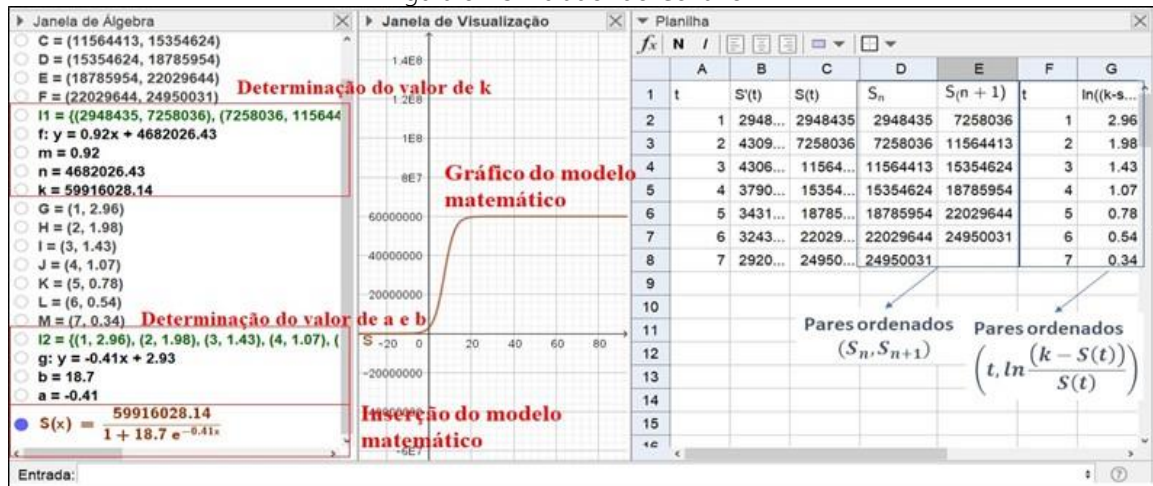
Para superar essas limitações, os estudantes consideraram um segundo cenário (cenário 2), no qual um segundo simulador foi construído, cujos valores de entrada são o número de reproduções por semana nas sete primeiras semanas. Com o auxílio do GeoGebra os estudantes utilizaram o método de Ford-Walford na construção de modelos assintóticos para determinar o valor da assíntota horizontal k e o método dos mínimos quadrados para encontrar o valor dos parâmetros b e r . Estes métodos foram utilizados a partir de informações, coletadas por meio de pesquisas no Spotify Charts, sobre o número de reproduções por semana da música Braba da cantora brasileira Luisa Sonza nas sete primeiras semanas desde o seu lançamento no Spotify. O software GeoGebra desempenhou a função de realização de cálculos.

A realização de cálculos por meio de tecnologias digitais é um uso tradicional na resolução de situações-problema, tendo frequentemente como justificativa a economia de tempo e a possibilidade de abranger uma grande quantidade de dados (Drijvers, 2020; Geiger, 2005). Na presente atividade, os cálculos realizados no GeoGebra não tiveram somente essa função de economia de tempo, mas para além disso, constituem uma tradução de uma linguagem matemática para uma linguagem computacional, o que possibilitou escrever os parâmetros do modelo em termos de comandos no software GeoGebra. Essa tradução complementa-se com o uso do software como experimentação, ocorrendo a transformação da situação em uma representação gráfica do modelo matemático (Figura 8).

O resultado do desenvolvimento da atividade 2 foi a produção de simuladores, em que a partir da inserção de valores relativos ao número de reproduções por semana de uma música qualquer lançada no Spotify é possível simular a curva que expressa o comportamento do número de reproduções dessa música até um instante qualquer, bem como identificar se

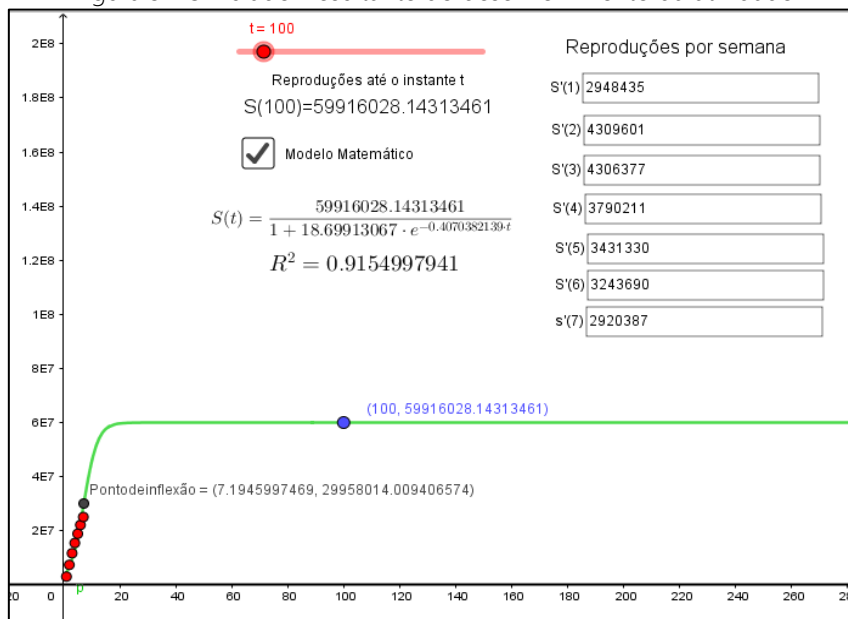
o modelo matemático gerado é adequado para representar os dados por meio do coeficiente de determinação R^2 . Ao usar o simulador, podemos indicar que o uso software GeoGebra exerceu as funções de controle das informações de entrada e de simulação do comportamento do fenômeno, possibilitando a interpretação dos resultados e a validação.

Figura 8 - Simulador do Cenário 2



Fonte: registros dos estudantes

Figura 9 - Simulador resultante do desenvolvimento da atividade



Fonte: registros dos estudantes

A interlocução das linguagens natural, matemática e computacional realizada indica que no desenvolvimento da atividade entraram em jogo conhecimentos relacionados à situação-problema, conhecimentos matemáticos e conhecimentos computacionais. Esses conhecimentos são intercambiáveis na medida em que na construção do modelo fez-se necessário ter conhecimentos sobre o comportamento do número de reproduções de uma música no Spotify (conhecimentos da situação-problema), sobre o modelo logístico e sobre os métodos de Ford-Walford e Mínimos Quadrados (conhecimentos matemáticos). O modelo matemático, por sua vez, foi preparado para a construção do simulador no GeoGebra,

evidenciando que o conhecimento matemático foi empregado como preparação para o uso do GeoGebra, estabelecendo uma relação entre conhecimento matemático e conhecimento computacional dos estudantes.

Tabela 1 - Uso da tecnologia nas atividades de modelagem matemática

Atividade	Relação com a tecnologia	Usos da tecnologia	Implicações para a configuração da atividade
Jogo de Poker	Tecnologia como parceira	Simulação em um jogo digital para investigação do funcionamento da situação em estudo	A compreensão da situação-problema, a coleta de informações, a obtenção do modelo matemático, resolução matemática e interpretação dos resultados foram mediadas pelas tecnologias digitais.
		Uso do <i>software</i> Excel para realização de cálculos numéricos e a identificação e correção de erros.	
		Uso <i>software</i> Curve Expert para a representação gráfica e ajuste de curvas, mediante a experimentação de possíveis curvas que pudessem representar os dados.	
		Uso do Excel e um simulador que calcula a probabilidade de vitória de uma jogada, com funções de simulação e controle, para interpretar os resultados e validar o modelo matemático.	
Spotify	Tecnologia como extensão de si mesmo	Uso do <i>software</i> GeoGebra para, visualização, experimentação e simulação na constituição de uma configuração pseudo-empírica da situação e na antecipação implementada de conhecimentos matemáticos e de informações necessárias para a construção de um simulador.	O uso de tecnologias digitais integrou-se ao desenvolvimento da atividade de modelagem matemática, indicando um modo de fazer modelagem matemática diferente do relatado na literatura, sendo, entretanto, fundamental para a resolução do problema. Os conhecimentos sobre situação-problema, conhecimentos matemáticos e conhecimentos computacionais atuaram em simbiose.
		Uso do GeoGebra na realização de cálculos e experimentação, para a tradução da linguagem matemática em uma linguagem computacional, em uma configuração empírica da situação	
		Uso <i>software</i> GeoGebra com as funções de controle das informações de entrada e de simulação do comportamento da situação, possibilitando a interpretação dos resultados e a validação.	
		Uso do <i>software</i> GeoGebra na interlocução entre conhecimentos da situação-problema, conhecimentos matemáticos e conhecimentos computacionais para constituição de um simulador computacional.	

Fonte: produzido pelos autores

Assim, na terminologia de Geiger (2005), podemos inferir que a tecnologia digital na atividade 2 atuou como extensão de si mesmo, em que a parceria entre estudante e tecnologia se funde em uma única identidade e o uso da tecnologia digital fomentou a argumentação matemática dos estudantes. Essa atuação da tecnologia no desenvolvimento da atividade diz respeito ao modo como os estudantes se relacionam com o software GeoGebra e com a situação-problema em estudo e implica em determinada configuração da atividade de modelagem matemática.

Tendo como objetivo simular o comportamento do número de reproduções acumuladas de uma música lançada no Spotify, a resposta para o problema não consistiu somente em resultados matemáticos interpretados à luz da situação real, mas em simulações em que, por meio do controle de informações sobre uma música qualquer, diferentes curvas a respeito do comportamento da situação puderam ser analisadas. Houve, portanto, uma transformação do modo de fazer modelagem matemática a partir das diferentes funções (visualização, realização de cálculos, experimentação, simulação, controle) desempenhadas pelas tecnologias digitais.

Na Tabela 1 apresentamos uma síntese dos usos da tecnologia nas duas atividades e implicações para o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática.

Os resultados evidenciam que os usos das tecnologias digitais no desenvolvimento de uma atividade modelagem estão condicionados ao modo como os estudantes se relacionam com as essas tecnologias e têm implicações no modo de fazer modelagem matemática.

Considerações finais

A investigação de possíveis implicações do uso de tecnologias digitais no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em dois contextos educacionais diferentes traz em seu escopo a necessidade de olhar para as configurações que as atividades de modelagem matemática tomam quando os estudantes fazem uso dessas tecnologias, em particular, para os fatores que influenciam essas configurações.

Na atividade Jogo de Poker, as tecnologias digitais foram importantes para o desenvolvimento bem-sucedido, tendo o papel de suporte e facilitadora em diferentes etapas da atividade de modelagem matemática. A diversidade de recursos tecnológicos utilizados denota a capacidade dos estudantes de buscar ferramentas tecnológicas que podem ser úteis para atender a diferentes propósitos e adequadas ao que requer cada etapa da atividade. A configuração da atividade foi sendo estruturada mediante os usos da tecnologia de modo que eles tiveram funções distintas em cada etapa, conforme as demandas da própria atividade de modelagem, sendo, portanto, a tecnologia digital uma parceira dos estudantes no desenvolvimento da atividade, conforme caracterização de Geiger (2005). Assim, se Diniz e Borba (2012) propõem que dados prontos podem ser usados e Goulart e Almeida (2020) sugerem que a tecnologia proporciona um refinamento desses dados, na presente pesquisa podemos propor que a tecnologia pode trazer para os estudantes diferentes experiências com os dados que lhes permitem definir encaminhamentos para a resolução e validação.

Na atividade reproduções de uma música no Spotify, o uso do GeoGebra promoveu uma reorganização no processo de fazer modelagem matemática, evidenciando o potencial das tecnologias digitais para atividades matemáticas, como destacado por Hoyles (2018), e a abordagem não-domesticada de tecnologias, apontada por Molina Toro, et al. (2019). De fato, o desenvolvimento dessa atividade não se deu de acordo com as etapas do ciclo

proposto por Greefrath et al. (2018), mas configurou-se a partir da combinação de elementos associados à modelagem matemática, ao conhecimento computacional dos estudantes e ao conhecimento computacional relacionado às ferramentas e comandos do software.

Essa configuração vai ao encontro do construto teórico seres-humanos-com-mídias (Borba; Villarreal, 2006) em que há uma simbiose entre conhecimento matemático e o das tecnologias digitais. De acordo com esse construto, o uso de tecnologias tem impactos no pensamento matemático dos estudantes e lhes proporciona associar esse pensamento com especificidades da situação e direcionar o uso da tecnologia conforme as demandas da atividade de modelagem.

Se por um lado as configurações das duas atividades de modelagem matemática foram influenciadas pelo uso das tecnologias digitais, por outro lado, o modo como os estudantes se relacionam com essas tecnologias e a natureza da situação-problema também influenciaram nas configurações das atividades, sinalizando que, para além das funções identificadas por Greefrath et al. (2018) para a tecnologia, o próprio ciclo de modelagem pode se alterar por meio da tecnologia como extensão do próprio estudante agindo na atividade de modelagem. De fato, enquanto na atividade Jogo de Poker a tecnologia digital viabilizou construir uma resposta para o problema e avaliá-la, na atividade reproduções de uma música no Spotify, a relação entre estudantes e tecnologias é simbiótica e o uso da tecnologia se funde com o conhecimento matemático e as características da situação para construir um simulador.

Esses resultados indicam que, embora a interrelação entre modelagem matemática e tecnologia seja inevitável, como propõem Galbraith e Fisher (2021), o uso de tecnologias digitais em atividades de modelagem matemática é subjetivo, isto é, depende dos sujeitos que as desenvolvem e suas possibilidades são condicionadas ao modo como esses sujeitos se relacionam com as tecnologias digitais e à natureza da situação-problema. Não se trata, portanto, de prescrever um determinado uso das tecnologias digitais em detrimento dos outros, mas de olhar para as possibilidades dessas tecnologias para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática a partir das especificidades da relação do estudante com tecnologia.

Referências

- ALMEIDA, L. M. W.; KOWALEK, R. M. O que se Entende por Validação em Atividades de Modelagem Matemática? *Alexandria*, v. 17, p. 1-24, 2024.
- ALMEIDA, L. M. W. de; KOWALEK, R. M. O processo de validação em atividades de modelagem matemática: em busca de um framework. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 26, n. 1, p. 313–338, 2024a.
- ALMEIDA, L. M. W. Uma abordagem didático-pedagógica da modelagem matemática. *VIDYA*, v. 42, n. 2, p. 121–145, 2022.
- ALMEIDA, L. M. W. Considerations on the use of mathematics in modeling activities. *ZDM*, v. 50, n. 1, p. 19-30, 2018.
- ALMEIDA, L. M. W.; CASTRO, E. M. V.; SILVA, M. H. S. Recursos semióticos em atividades de modelagem matemática e o contexto on-line. *Alexandria*, v.14, n 2, p.383-406, 2021.

- ALMEIDA, L. M. W.; GOULART, T. C. K. Recursos Semióticos em Atividades de Modelagem Matemática. *Jornal Internacional De Estudos Em Educação Matemática*, v. 13, n 3, p.286–297, 2021.
- BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. *Investigação Qualitativa em Educação Matemática: uma introdução à teoria e aos métodos*. 1. Ed. Lisboa: Porto Editora, 2007.
- BORBA, M. C.; CHIARI, A. S.; ALMEIDA, H. R. F. L. Interactions in virtual learning environments: new roles for digital technology. *Educational Studies in Mathematics*, v. 98, n.3, p. 269-286, 2018.
- BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modeling, visualization and experimentation*. Vol. 39. Springer Science & Business Media, 2006.
- BRAY, A.; TANGNEY, B. Technology usage in mathematics education research—A systematic review of recent trends. *Computers & Education*, v. 114, p. 255-273, 2017.
- CZOCHER, J. A. *Toward a description of how engineering students think mathematically*. 2013. Tese (Doutorado em Filosofia) - The Ohio State University, Ohio, 2013.
- CZOCHER, J. A. How does validating activity contribute to the modeling process? *Educational Studies in Mathematics*, V. 99, P. 137-159, 2018.
- DINIZ, L. N.; BORBA, M. de C. Leitura e Interpretação de Dados Prontos em um Ambiente de Modelagem e Tecnologias Digitais: o mosaico em movimento. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, v, 26, n. 42, p. 935-962, 2012.
- DRIJVERS, P. *Digital tools in Dutch mathematics education: A dialectic relationship*. In National Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics. Cham, Switzerland: Springer, 2020. p. 177-195.
- ENGELBRECHT, J. LLINARES, S; BORBA, M. C. Transformation of the mathematics classroom with the internet. *ZDM*, v.52, p. 825–841, 2020. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01176-4>.
- GALBRAITH, P.; FISHER, D. Technology and mathematical modelling: addressing challenges, opening doors. *Quadrante*, v. 30, n. 1, p. 198-218, 2021.
- GEIGER, V. Master, servant, partner and extension of self: A finer grained view of this taxonomy. In: *Building Connections, Theory, Research and Practice: Proceedings of the 28th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*. Mathematics Education Research Group of Australasia, 2005, p. 369-376.
- GOULART, T. C. K.; ALMEIDA, L. M. W. A tecnologia digital em atividades de modelagem matemática: um olhar para os recursos semióticos, *Revista Paranaense de Educação Matemática*, v. 9, n. 19, p. 262-284, 2020.
- GREEFRATH, G. Using Technologies: New Possibilities of Teaching and Learning Modelling – Overview. In: *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling (ICTMA 14)*. Hamburgo: KAISER, G.; BLUM, W.; FERRI, R. B.; STILLMAN, G. (Ed.), 2011. p. 301–304.
- GREEFRATH, G.; SILLER, H. S. Modelling and simulation with the help of digital tools. In: *Mathematical modelling and applications*. Cham, Switzerland: Springer, 2017. p. 529-539.

GREEFRATH, G.; HERTLEIF, C.; SILLER, H. S. Mathematical modelling with digital tools—a quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. *ZDM*, v. 50, n. 1, p. 233-244, 2018.

HOYLES, C. Transforming the mathematical practices of learners and teachers through digital technology. *Research in Mathematics Education*, v. 20, n. 3, p. 209-228, 2018.

MARTENS, A. S.; KLÜBER, T. E. Modelagem Matemática e a sala de aula: um olhar a partir dos professores participantes de formação continuada. *Amazônia | Revista de Educação em Ciências e Matemática*, v.19, n. 43, p. 94-106, 2023.

MOLINA TORO, J. F.; RENDÓN-MESA, P. A.; VILLA-OCHOA, J. Research trends in digital technologies and modeling in mathematics education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, v. 15, n. 8, p. 1-13, 2019.