

O ensino de progressões geométricas via resolução de problemas: análise das possibilidades de articulação das estratégias dos alunos

Teaching geometric progressions through problem solving: analysis of the possibilities of articulating students' strategies

Renato Rodrigues dos Santos¹
Marcelo Carlos de Proença²

Resumo

O presente artigo tem como objetivo analisar as possibilidades de articulação das estratégias elaboradas pelos alunos ao conteúdo de Progressões Geométricas (PG) na abordagem do Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas. Participaram 37 alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública do Paraná. Os dados foram produzidos por meio dos registros escritos dos grupos e gravações em áudio, sendo analisados à luz da Análise de Conteúdo. Os resultados indicam que na SM1 predominou a estratégia de calcular acréscimos percentuais termo a termo sem articulação imediata com PG. Na SM2, destacou-se a multiplicação termo a termo pela razão, estratégia com potencial de articulação ao conteúdo. Os resultados de nosso estudo ressaltam a importância da escolha criteriosa do problema, principalmente quanto à possibilidade de articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo.

Palavras chave: ensino de matemática; progressão geométrica; estratégias.

Abstract

The aim of this article is to analyze the possibilities to articulating students' strategies with the content of Geometric Progressions (GP) through the Mathematics Teaching-Learning via Problem Solving approach. Thirty-seven second-year high school students from a public school of the state Paraná participated in the study. Data were collected through written group records, and audio recordings, and analyzed using Content Analysis. The results indicate that in SM1 the predominant strategy was calculating percentage increases term by term which does not immediately articulate with the concept of GP. In SM2, term-by-term multiplication by the common ratio stood out as the predominant strategy, showing potential for articulation with the content, as it highlights the multiplicative relationship that characterizes a geometric progression. The results from this study highlight the importance of carefully selecting problems, particularly regarding their potential to articulate students' strategies with the mathematical content.

Keywords: mathematics teaching; geometric progression; strategies.

¹ Instituto Federal do Paraná - Campus Paranavaí | renato.santos@ifpr.edu.br

² Universidade Estadual de Maringá | mcproenca@uem.br

Introdução

A Resolução de Problemas é um tema em constante debate na Educação Matemática, sendo que estudos têm revelado tanto dificuldades quanto possibilidades de seu uso em sala de aula para a construção de conhecimento matemático pelos alunos (Proença et al., 2020; Altoé; Freitas, 2025; Luz; Proença, 2025). O documento Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018), considera a Resolução de Problemas, dentre outros processos matemáticos, “[...] formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são ao mesmo tempo objeto e estratégia para a aprendizagem” (Brasil, 2018, p. 266).

Nesse documento, a habilidade de resolver problemas em diversos contextos permeia diversos conteúdos matemáticos, sendo a Progressão Geométrica (PG) um desses conteúdos. Embora a BNCC não explicita a maneira como o professor deve ensinar Matemática em sala de aula para levar os alunos a resolverem problemas, concordamos com os autores Schroeder e Lester Junior (1989), Cai e Lester (2012) e Liljedahl e Cai (2021) que destacam a relevância da Resolução de Problemas para o desenvolvimento do pensamento matemático e para a compreensão de conceitos.

Com o objetivo de orientar o ensino de Matemática na abordagem da resolução de problemas, Proença (2018) apresentou uma proposta que utiliza o problema como elemento desencadeador do processo de ensino e aprendizagem, denominada Ensino-aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas (EAMvRP). Estudos têm demonstrado que o EAMvRP tem contribuído para favorecer a aprendizagem dos alunos de forma ativa, elaborando estratégias, testando hipóteses e estabelecendo relações entre os conhecimentos que possuem com o novo conteúdo/conceito que será abordado a partir de problemas (Akamine; Proença, 2022; Rozario; Machado; Proença, 2023; Santos; Campelo; Proença 2023; Luz; Proença, 2025). Para Rozario (2022), essa abordagem “proporcionou aos alunos a construção de novos saberes diante da situação de matemática proposta” (p. 117).

No que tange ao ensino de PG, pesquisas evidenciam as mais diversas abordagens. A exemplo disso, destacamos o ensino de PG atrelado à construção de fractais (Gonçalves, 2007; Valmorbida, 2018; Vieira, 2019; Sobrinho, 2024); o ensino de PG atrelado à construção de escalas musicais (Henschel, 2017; Lima, 2018; Maia, 2020) o ensino de PG por meio da Modelagem Matemática (Livi, 2024; Silva, 2024) e o ensino de PG por meio da resolução de problemas (Milani, 2011; Arruda, 2013; Melo, 2015; Nascimento, 2017; Pinto, 2021). No entanto, encontramos uma única pesquisa desenvolvida com alunos do Ensino Médio, que efetivamente implementou o ensino de PG utilizando o problema como ponto de partida. A pesquisa desenvolvida por Melo (2015) investigou as contribuições que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, segundo Alevatto e Onuchic (2009), propiciam para o ensino de progressões aritméticas e geométricas. Nesse sentido, acreditamos que ensinar PG partindo de um problema, ainda é uma abordagem que carece de ser implementada.

Considerando a indicação da BNCC (Brasil, 2018) para o desenvolvimento de conhecimentos e habilidades para resolver problemas e as evidências de que o EAMvRP pode contribuir para a aprendizagem dos alunos, entendemos que o ensino de PG pode e deve ser abordado nessa perspectiva de ensino. Assim, o objetivo deste artigo é analisar as possibilidades de articulação das estratégias elaboradas pelos alunos com o conteúdo de PG, na abordagem do EAMvRP.

Resolução de problemas: aspectos sobre a abordagem de ensino

De acordo com Fiorentini (1994), as primeiras experiências significativas enfatizando a resolução de problemas no ensino podem ser creditadas a John Dewey, entre 1896 e 1904. Stanic e Kilpatrick (1989) afirmam que para Dewey os problemas surgem naturalmente da experiência, conduzindo a reorganização progressiva dos conceitos.

Os autores Schroeder e Lester Junior (1989) apontam que na década de 1980, foram desenvolvidos um grande número de recursos didáticos para tornar a resolução de problemas o foco do ensino da matemática escolar, conforme recomendou o NCTM (1980). Para esses autores, havia diferentes concepções acerca de como a resolução de problemas era abordada pelos professores no ensino de matemática. Nesse sentido, Schroeder e Lester Junior (1989) propuseram distinguir entre três abordagens da resolução de problemas:

No *ensino sobre resolução de problemas*, o professor deve incentivar aos alunos a resolver problemas percorrendo as quatro fases ou etapas de resolução propostas por Polya (1945), que envolve a compreensão do problema, o estabelecimento de um plano, a execução e o retrospecto. Além disso, podem ser apresentadas aos alunos uma série de heurísticas (estratégias) a serem aplicadas em uma variedade de problemas. O ensino sobre a resolução de problemas é focado nos processos de resolução de problemas sem preocupação com o conteúdo matemático.

No *ensino para a resolução de problemas*, os problemas são propostos aos alunos após a apresentação de um novo conteúdo/conceito matemático. Nessa abordagem, o foco é na transferência da aprendizagem, ou seja, a aplicação dos conteúdos matemáticos recém aprendidos na resolução de problemas.

No *ensino via/através da resolução de problemas*, os problemas se constituem como um meio para o ensino de matemática. Nessa abordagem, o ensino de um determinado conteúdo/conceito tem início a partir de uma situação de matemática, que incorpora aspectos relevantes desse conceito que será abordado. Schroeder e Lester Junior (1989) consideram que essa abordagem é a mais coerente, pois serve de contexto no qual se aprende e se aplica a matemática.

Na abordagem do ensino via resolução de problemas, Proença (2018) elaborou um esquema do trabalho por meio de uma sequência de ações, que o professor deve desempenhar ao ensinar Matemática nessa perspectiva. O autor apresentou a abordagem do Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas (EAMvRP) que é composto por cinco ações: Escolha do problema; Introdução do problema; Auxílio aos alunos durante a resolução; Discussão das estratégias dos alunos; e Articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo.

1) A *escolha do problema* consiste na escolha da situação de matemática que tenha potencial para ser reconhecida pelos alunos como um problema. A situação escolhida deverá permitir que os alunos possam resolvê-la com os conhecimentos que já possuem e deve possibilitar a construção do novo conceito que será introduzido, estabelecendo assim relações entre os conhecimentos prévios e o novo conceito. Proença (2018) argumenta que, em função das especificidades do conteúdo abordado, essa ação pode demandar a utilização de mais de uma situação de matemática, as quais podem ser obtidas na íntegra (retiradas, por exemplo, de um livro didático), elaboradas (criação do professor) ou mesmo reelaboradas (reelaboração a partir de alguma obtida na íntegra).

2) Na *introdução do problema*, o professor deve apresentar aos alunos a situação de matemática que servirá como ponto de partida para o estudo do conteúdo/conceito matemático a ser abordado. Inicialmente, recomenda-se a organização dos alunos em grupos, de modo a favorecer o compartilhamento de conhecimentos e experiências previamente construídos. Após a divisão em grupos, deve-se solicitar que os alunos resolvam a situação proposta com os conhecimentos que possuem, de modo que, nesse momento, a situação de matemática possa se configurar como um problema.

3) Na ação de *auxílio aos alunos durante a resolução*, o professor deve assumir o papel de observador, incentivador e direcionador da aprendizagem. Nesta ação, cabe ao professor prestar auxílio diante de dúvidas relativas a conceitos ou termos matemáticos desconhecidos, bem como corrigir interpretações equivocadas, orientando os grupos ao longo do processo de resolução da situação de matemática. Trata-se do momento no qual o professor observa o trabalho dos grupos com o objetivo de identificar suas dificuldades, incentivando-os a prosseguir nesse processo de resolução. Além disso, caso os alunos não apresentem uma estratégia de resolução, o professor pode direcioná-los a uma estratégia previamente estabelecida.

4) A ação de *discussão das estratégias dos alunos*, consiste na socialização das resoluções elaboradas pelos grupos. É importante que os grupos apresentem as diferentes estratégias adotadas, na lousa, pois, desse modo, o professor poderá apontar as dificuldades decorrentes da escolha e os equívocos cometidos no caso de haver alguma inconsistência nas resoluções apresentadas. Ao término dessa ação, pode-se direcionar os alunos a perceber a necessidade de reavaliar a resposta obtida e fazer uma síntese do que aprenderam nesse processo.

5) A ação de *articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo* tem como principal objetivo utilizar elementos centrais das estratégias apresentadas pelos alunos e relacioná-las ao novo conteúdo/conceito matemático, possibilitando o estabelecimento de conexões com conhecimentos previamente adquiridos. Caso não seja possível tal articulação utilizando-se de estratégias elaboradas pelos alunos, o professor poderá apresentar uma estratégia previamente estabelecida e, a partir dela, promover a articulação com o conteúdo em estudo.

Encaminhamentos metodológicos

O presente estudo é de natureza qualitativa (Bogdan; Biklen, 1994), pois procura compreender o comportamento dos sujeitos em seu ambiente natural, a sala de aula, e, para isso, se utiliza de dados descritivos coletados por meio das observações do pesquisador, das gravações e transcrição dos áudios e dos registros escolares dos alunos. A pesquisa prioriza a compreensão do processo de aprendizagem em detrimento dos resultados, havendo preocupação com as perspectivas dos participantes.

Os dados obtidos são provenientes da primeira etapa de nossa proposta de organização do ensino de PG via resolução de problemas, que foi elaborada e implementada em nossa pesquisa de doutorado. A referida etapa, denominada *uso do problema como ponto de partida*, foi elaborada em consonância com as cinco ações do EAMvRP de Proença (2018). Nossa proposta de ensino foi implementada no primeiro semestre de 2024, em uma turma composta por 37 alunos do 2º ano do Ensino Médio Técnico de uma escola pública da região Noroeste do Paraná, que foram organizados em 16 grupos. A proposta de ensino foi organizada conforme descrito a seguir:

1) A escolha do problema consistiu na elaboração/reelaboração de duas situações de matemática (Quadro 1) com potencial para permitir a articulação de estratégias de resolução ao conceito de PG. A Situação 1 – SM1 tem potencial para envolver os alunos em um contexto real, valorizando seus conhecimentos prévios, enquanto a Situação 2 – SM2 faz uso de imagens, conforme recomendado por Proença (2021b), como alternativas para conduzir os alunos na busca de padrões.

Quadro 1 – Situações de matemática escolhidas para a Etapa 1

SM1) Andréia, proprietária de uma propriedade rural em Paranaíba, montou uma pequena agroindústria com o objetivo de agregar valor à sua produção rural. No primeiro ano de atuação, produziu 3.000 potes de doce de abóbora. Andréia planejou um crescimento anual na produção desse doce da ordem de 20% em relação ao ano anterior. Supondo que sua expectativa se concretize, qual deverá ser, aproximadamente, sua produção de doce de abóbora no sexto ano de atividade?

SM2) (Souza, 2020 – Adaptado) O Triângulo de Sierpinski é uma figura geométrica formada a partir de um triângulo equilátero (na cor preta) por meio de um processo de construção, que consiste, em cada etapa, na sua divisão em quatro triângulos equiláteros congruentes, retirando-se o triângulo central. A seguir são apresentadas as cinco primeiras figuras obtidas nesse processo:




Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5 ...

A quantidade de triângulos em preto obtida em cada uma dessas etapas forma uma sequência. Qual é a posição ocupada por uma figura que tem 2187 triângulos?

Fonte: Elaborado pelos autores (2024)

Proença (2018) destaca que as situações de matemática escolhidas devem possibilitar o uso de diferentes estratégias de resolução e recomenda que o professor preveja, antecipadamente, possíveis estratégias a serem utilizadas pelos alunos. Tal previsão é relevante durante a terceira ação, a de auxílio aos alunos, pois permite que o professor os conduza a uma dessas estratégias caso apresentem dificuldades no processo de resolução. Nesse sentido, apresentamos, a seguir, as estratégias previstas para a resolução da SM1 e da SM2.

No que se refere às estratégias previstas para a SM1 (Quadro 2), o uso da *Estratégia 1* implica em reconhecer que se trata de um problema que envolve uma sequência numérica na qual a quantidade de doces produzidas em um determinado ano é 20% maior do que a produzida no ano anterior, e, desse modo, pode-se calcular os acréscimos ano a ano, utilizando a regra de três. O uso da *Estratégia 2* decorre do reconhecimento de que a SM1 é um problema envolvendo acréscimos sucessivos e, para resolvê-lo, é necessário compreender que acrescentar 20% equivale a multiplicar por 1,2. Por fim, o uso da *Estratégia 3* implica em reconhecer que a SM1 pode ser modelada por meio de uma função exponencial. Sua resolução, nesse caso, requer a obtenção de uma expressão algébrica que permita calcular a produção anual da indústria em função do tempo, expresso em anos.

Quadro 2 – Previsão das estratégias de resolução da SM1

Estratégia 1: O aluno poderá obter a expectativa de produção dessa empresa em seu sexto ano de atividade, aplicando acréscimos percentuais sucessivos de 20% sobre a produção do primeiro ano de atividade. Uma maneira de fazê-lo, seria utilizando a “regra de três” sucessivamente:

Produção do 2º ano de atuação:

$$\frac{3.000}{x} = \frac{100}{120} \Rightarrow 100x = 3.000 \cdot 120 \Rightarrow x = \frac{3.000 \cdot 120}{100} \Rightarrow x = 3.600 \text{ potes}$$

Produção do 3º ano de atuação:

$$\frac{3.600}{x} = \frac{100}{120} \Rightarrow 100x = 3.600 \cdot 120 \Rightarrow x = \frac{3.600 \cdot 120}{100} \Rightarrow x = 4.320 \text{ potes}$$

Produção do 4º ano de atuação:

$$\frac{4.320}{x} = \frac{100}{120} \Rightarrow 100x = 4.320 \cdot 120 \Rightarrow x = \frac{4.320 \cdot 120}{100} \Rightarrow x = 5.184 \text{ potes}$$

Produção do 5º ano de atuação:

$$\frac{5.184}{x} = \frac{100}{120} \Rightarrow 100x = 5.184 \cdot 120 \Rightarrow x = \frac{5.184 \cdot 120}{100} \Rightarrow x = 6.220,8 \cong 6221 \text{ potes}$$

Produção do 6º ano de atuação:

$$\frac{6.220,8}{x} = \frac{100}{120} \Rightarrow 100x = 6.220,8 \cdot 120 \Rightarrow x = \frac{6.220,8 \cdot 120}{100} \Rightarrow x = 7.464,96 \cong 7.465 \text{ potes}$$

Possível resposta: A produção de doce de abóbora dessa agroindústria deverá ser de, aproximadamente, 7.465 potes.

Estratégia 2: O aluno poderá considerar que conceder acréscimos sucessivos de 20%, equivale a multiplicar sucessivamente por 1,2. Uma forma de organizar os dados seria o uso da tabela:

Ano de atuação	Produção de doce de abóbora
1º	3.000 potes
2º	$3.000 \cdot 1,2 = 3.600$ potes
3º	$3.600 \cdot 1,2 = 4.320$ potes
4º	$4.320 \cdot 1,2 = 5.184$ potes
5º	$5.184 \cdot 1,2 = 6.220,8 \cong 6221$ potes
6º	$6.220,8 \cdot 1,2 = 7.464,96 \cong 7.465$ potes

Possível resposta: A produção de doce de abóbora dessa agroindústria deverá ser de, aproximadamente, 7.465 potes.

Estratégia 3: O aluno poderá representar as multiplicações consecutivas pelo mesmo fator, por meio da função exponencial. Sendo P a produção dessa agroindústria e n o ano de atuação, a função $P(n) = 3.000 \cdot (1,2)^{n-1}$ fornece a estimativa de produção dessa agroindústria em função do tempo (em anos) de atuação. Substituindo $n = 6$, obtemos:

$$P(6) = 3.000 \cdot (1,2)^{6-1} = 3.000 \cdot 2,28832 \Rightarrow P(6) = 7.464,96 \cong 7465 \text{ potes.}$$

Possível resposta: A produção de doce de abóbora dessa agroindústria deverá ser de, aproximadamente, 7.465 potes.

Fonte: Elaborado pelos autores (2024)

No Quadro 3, apresentado a seguir, descrevemos as estratégias previstas para a SM2. No caso dessa situação de matemática, o uso da *Estratégia 1* implica reconhecer que se trata de um problema envolvendo uma sequência numérica, na qual a regra que permite passar de um termo a outro é a multiplicação por 3. Uma das formas de resolvê-la consiste em relacionar a posição das figuras às respectivas quantidades de triângulos em preto por meio de uma tabela. O uso da *Estratégia 2* implica na elaboração de um modelo matemático que

associa a posição das figuras com as suas respectivas quantidades de triângulos em preto, ou seja, a lei de formação de uma função exponencial. A obtenção da solução, nesse caso, requer ainda a resolução de uma equação exponencial.

Quadro 3 – Previsão das estratégias de resolução da SM2

Estratégia 1: O aluno poderá notar que a quantidade de triângulos na cor preta triplica de uma figura para outra. Uma maneira de obter a posição ocupada pela figura que tem 2187 triângulos é montar uma tabela com a posição das figuras e quantidade de triângulos:

Figura	Quantidade de triângulos
1	1
2	$3 \cdot 1 = 3$
3	$3 \cdot 3 = 9$
4	$3 \cdot 9 = 27$
5	$3 \cdot 27 = 81$
6	$3 \cdot 81 = 243$
7	$3 \cdot 243 = 729$
8	$3 \cdot 729 = 2187$

Possível resposta: A figura que tem 2187 triângulos na cor preta é a figura 8.

Estratégia 2: Outra estratégia possível, seria determinar a lei de formação da função exponencial que relaciona a quantidade de triângulos (Q) que constitui cada figura, com a sua posição (n). O aluno poderia observar que $Q(1) = 3^{1-1}$, $Q(2) = 3^{2-1}$, $t(3) = 3^{3-1}$, portanto, $Q(n) = 3^{n-1}$.

Para obter o valor de n , bastaria substituir Q por 2197, obtendo-se

$$\begin{aligned} Q(n) &= 3^{n-1} \\ \Rightarrow 2187 &= 3^{n-1} \\ \Rightarrow 3^7 &= 3^{n-1} \\ \Rightarrow n &= 8 \end{aligned}$$

Possível resposta: A figura que tem 2187 triângulos na cor preta é a figura 8.

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

2) Na ação de *introdução do problema*, o professor pesquisador solicitou aos alunos que se organizassem em grupos de no máximo três alunos. Como estavam presentes 37 alunos, foram distribuídos em 16 grupos, sendo seis trios, nove duplas e um grupo com apenas um integrante. Após essa organização, o professor pesquisador entregou aos grupos uma ficha de atividades contendo as duas situações de matemática e instruiu-os para que resolvessem com os conhecimentos que possuíam, dando início à ação de auxílio.

3) Na ação de *auxílio aos alunos durante a resolução*, o professor pesquisador atuou de modo a identificar as dúvidas e dificuldades dos alunos, procurando envolvê-los no processo de resolução de problemas. No que tange a SM1, as dificuldades mais recorrentes foram relacionadas à compreensão de que a base de cálculo dos aumentos percentuais não é a mesma para cada acréscimo. Nesse sentido, o professor pesquisador atuou como direcionador, questionando os alunos sobre a base de cálculo e conduzindo-os para a Estratégia 1, que mais se aproximou do raciocínio que haviam desenvolvido. No que se refere a SM2, o professor pesquisador identificou dificuldades em estabelecer uma sequência numérica, relacionando posição das figuras com a quantidade de triângulos em preto e atuou direcionando os alunos a essa percepção. Ao término dessa ação, as fichas de atividades foram recolhidas e posteriormente digitalizadas.

4) Na ação de *discussão das estratégias dos alunos*, no intuito de agilizar as discussões, o professor pesquisador selecionou as diferentes estratégias que foram elaboradas pelos alunos, na aula anterior, e organizou-as em slides e, na aula seguinte, projetou-as com uso de multimídia, no quadro, sem a identificação dos grupos. Durante as discussões, solicitou que os grupos se identificassem voluntariamente para que pudessem explicar a estratégia que haviam utilizado.

Ao término das discussões, propôs aos alunos a questão: Explique as estratégias que seu grupo utilizou para resolver as situações 1 e 2 e, caso tenha ocorrido, explique as dificuldades que enfrentou nesse processo de resolução.

5) Após a discussão das estratégias dos alunos, o professor pesquisador realizou a *articulação das estratégias ao conteúdo* conforme previsto. Ao observar que não seria possível articular ao conteúdo uma das estratégias elaboradas pelos alunos para resolver a SM1, tomou a decisão de articular a *Estratégia 2* que havia elaborado previamente. No que se refere à SM2, a articulação ao conteúdo foi realizada por meio de uma estratégia que foi adotada pela maioria dos alunos, similar à *Estratégia 1*.

Os dados obtidos foram analisados à luz da Análise de Conteúdo (Bardin, 2016), que é organizada em três fases: A *pré-análise* correspondeu à leitura flutuante das respostas dos alunos e à transcrição e organização dos áudios; a *exploração do material* consistiu na identificação das unidades de registro e elaboração das categorias de análise a partir dos dados obtidos; o *tratamento dos resultados* consistiu no processo de organização dos dados obtidos em quadros, na análise qualitativa desses dados à luz do EAMvRP e na discussão com outros estudos.

Análise das estratégias dos alunos

Nesta seção, apresentamos a análise das estratégias que foram elaboradas pelos alunos no processo de resolução. No Quadro 4, a seguir, apresentamos uma síntese do desempenho e das estratégias elaboradas pelos grupos na resolução da SM1:

Quadro 4 – Desempenho e estratégias elaboradas pelos grupos na resolução da SM1

Estratégias de Resolução	Procedimento de Resolução	Obteve resposta	
		Correta	Incorreta
Calculou os acréscimos percentuais ano a ano.	Multiplicou por uma constante.	G1, G3, G7, G12 e G13	-
	Utilizou a regra de três.	G2, G4, G6, G9, G10, G14 e G16	G15
	Não apresentou os cálculos.	G5	G8
Adotou uma estratégia baseada em um modelo exponencial.	Calculou os acréscimos sucessivos multiplicando por $(1,2)^5$.	G11	-

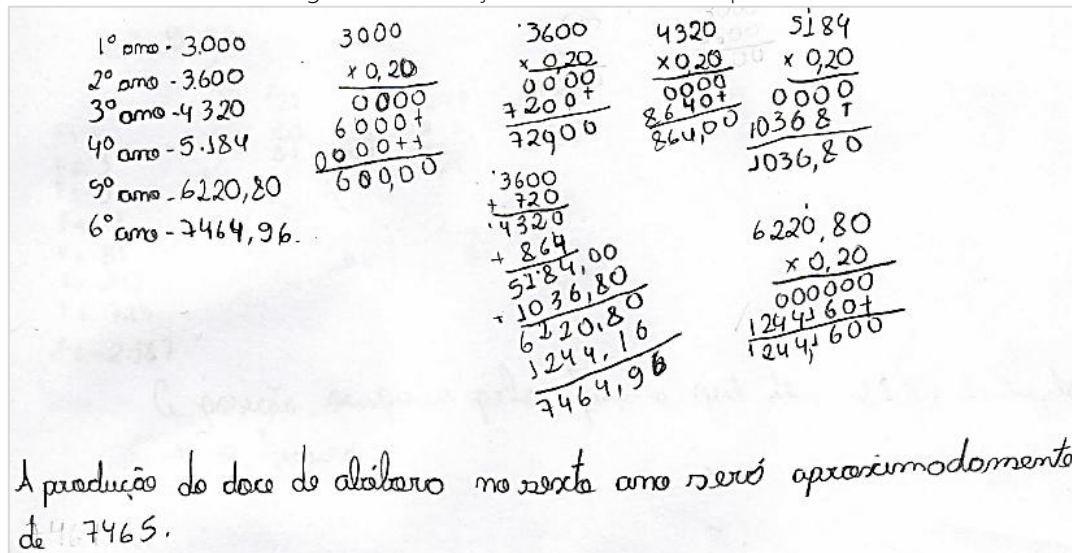
Fonte: Elaborado pelos autores (2025)

Por meio do Quadro 4, podemos observar que, dentre os 16 grupos que resolveram a SM1, 15 desses grupos adotaram a estratégia de calcular os acréscimos percentuais ano a ano, enquanto apenas um grupo adotou uma estratégia baseada em um modelo exponencial. Assim, os grupos seguiram estratégias de natureza aritmética para resolver a SM1, não adotando simbologias para representar expressões matemáticas, o que ocorreu nas pesquisas

de Proença et al. (2020) e Luz e Proença (2025) na resolução de problemas de uso de sistema de equações. Quanto ao desempenho, 14 grupos do nosso estudo obtiveram a resposta correta, sendo que os grupos G8 e G15 cometeram erros procedimentais.

Sobre as estratégias e procedimentos de resolução, cinco grupos utilizaram a estratégia de calcular os acréscimos percentuais sucessivos utilizando o procedimento de multiplicar por uma constante. A exemplo disso, apresentamos a resolução do grupo G1 (Figura 1):

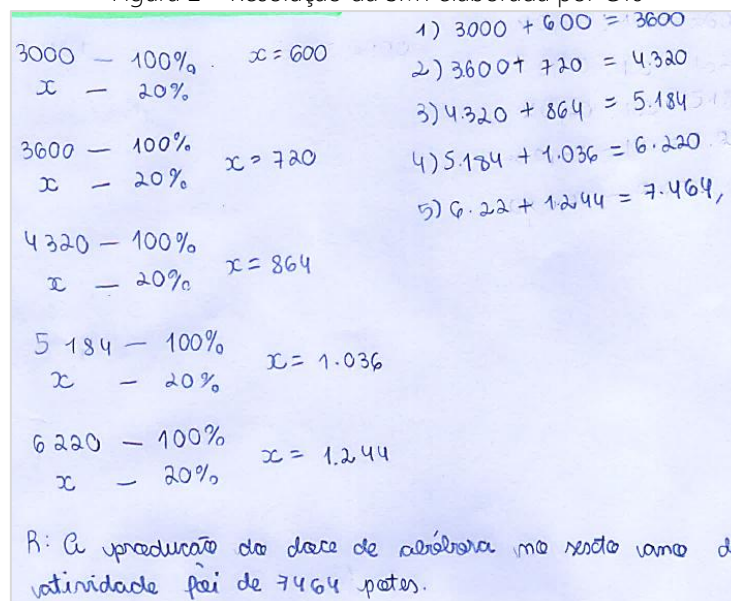
Figura 1 – Resolução da SM1 elaborada por G1



Fonte: Registro do grupo G1 (2024)

O grupo G1 considerou que calcular 20% de um número equivale a multiplicá-lo por 0,2, de modo que calculou 20% de cada termo da sequência e efetuou a soma para obter o próximo termo. A estratégia de calcular os acréscimos percentuais ano a ano, utilizando a regra de três, foi adotada por oito grupos. Na Figura 2, apresentamos a resolução do grupo G16 para ilustrar esse procedimento de resolução:

Figura 2 – Resolução da SM1 elaborada por G16

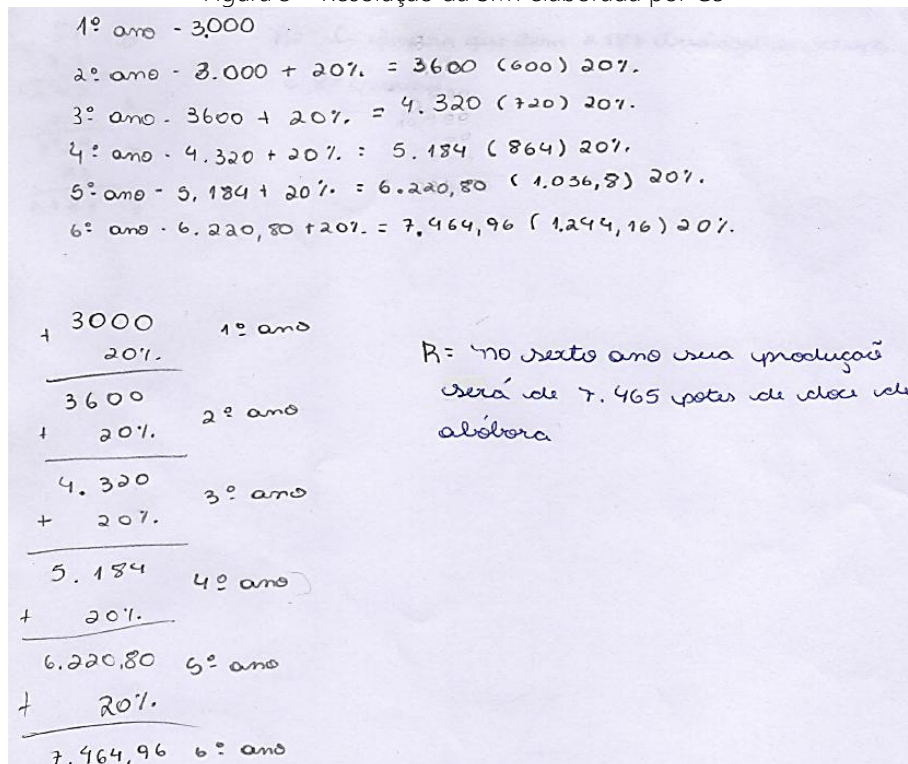


Fonte: Registro do grupo G16 (2024)

O grupo G16 calculou os acréscimos de 20% ao ano por meio da regra de três como se pode observar por meio de seus registros escritos (Figura 2). Observamos também que o grupo desconsiderou as casas decimais que surgiram nos cálculos percentuais a partir do quinto ano de produção, o que resultaria em um arredondamento para 7465 potes de doce.

Por conseguinte, dois grupos adotaram a estratégia de calcular os acréscimos percentuais ano a ano. Porém, não deixaram nenhum registro escrito que nos possibilitasse avaliar os procedimentos utilizados no cálculo desses aumentos percentuais. Na Figura 3, apresentamos a resolução do Grupo G5, que ilustra o procedimento adotado:

Figura 3 – Resolução da SM1 elaborada por G5



Fonte: Registro do grupo G5 (2024)

Na Figura 3, pode-se notar que há uma descrição organizada dos acréscimos anuais na produção de potes de doce. No entanto, o grupo não apresentou os cálculos detalhados e isso não nos permitiu identificar os procedimentos utilizados para o cálculo das porcentagens. Por fim, o grupo G11 foi o único que adotou uma estratégia baseada em um modelo exponencial. Sua estratégia é apresentada na Figura 4.

Por meio da Figura 4, pode-se observar que o grupo G11 considerou que acrescentar 20% equivale a multiplicar por 1,2 e, além disso, utilizou potenciação para representar as multiplicações sucessivas por 1,2. Cabe ressaltar que, durante a etapa de auxílio, observou-se que os alunos A22(G16), A29(G10), A30(G14) e A32(G7) adotaram a estratégia equivocada de calcular 20% de 3000 e multiplicar por 6, desconsiderando que a base de cálculo não permanece a mesma para cada aumento percentual. Esse tipo de erro também foi apontado por Chiconato (2013) em um estudo que abordou o ensino de PG por meio de uma simulação de despoluição de um lago. Diante dessas dificuldades, o professor-pesquisador questionou os alunos acerca da base cálculo dos aumentos percentuais, atuando como direcionador e conduzindo-os a repensar na estratégia que haviam adotado.

Figura 4 – Resolução da SM1 elaborada por G11

$\frac{20\%}{100} = 1 + 0,20 = 1,20$
 $1,20^5 = 2,48832$
 $3000 \cdot 2,48832 = 7.464,88$

p. No sentido contrário da obtusidade
 será aproximadamente de
 7.464,88 dias de duração

3000
 $\times 2,48832$

 $7.464,88$

$1,20$
 $\times 1,20$

 $1,44$
 $\times 1,20$

 $1,728$
 $\times 1,20$

 $2,0736$
 $\times 1,20$

 $2,48832$

200100
 $- 2000,20$

 000

Fonte: Registro do grupo G11 (2024)

Diante das resoluções da SM1 apresentadas pelos grupos, observamos a predominância de estratégias relacionadas ao cálculo percentual ano a ano, sendo adotadas por 15 grupos, que em sua maioria executaram com o uso da regra de três. As estratégias apresentadas pelos alunos para resolver a SM1 não tem potencial para uma articulação imediata ao conteúdo de PG.

No Quadro 5, a seguir, apresentamos uma síntese do desempenho e das estratégias elaboradas pelos grupos no processo de resolução da SM2:

Quadro 5 – Desempenho e estratégias elaboradas pelos grupos na resolução da SM2

Estratégias de Resolução	Obteve resposta	
	Correta	Incorreta
Calculou termo a termo, multiplicando o antecessor pela razão.	G1, G2, G3, G4, G5, G6, G8, G10, G11, G12, G13, G14 e G15	G16
Calculou termo a termo no sentido inverso, dividindo pela razão.	G9	-
Adotou uma estratégia equivocada.	-	G7

Fonte: Elaborado pelos autores (2025)

Por meio do Quadro 5, podemos observar que, dentre os 16 grupos que resolveram a SM1, 12 grupos obtiveram a resposta correta, enquanto o grupo G7 utilizou uma estratégia que não levaria à solução do problema e G16 cometeu erro procedimental ao enumerar os termos da sequência.

Sobre as estratégias e procedimentos de resolução, 14 grupos utilizaram a estratégia de multiplicar sucessivamente a quantidade de triângulos em uma determinada figura por três, até obter a posição da figura que possui 2.187 triângulos. A estratégia de multiplicação pela razão também foi observada em uma situação de matemática utilizada por Melo (2015) para

Por meio da resolução elaborada por G2, podemos observar que os integrantes desse grupo compreenderam que a quantidade de triângulos em preto de cada figura triplica ao passar de uma figura para outra. Desse modo, para obter as quantidades de triângulos em preto das próximas figuras, seguiram multiplicando por três as quantidades de triângulos obtidas nas figuras anteriores, até a figura 8, que possui 2187 triângulos. Outra estratégia que observamos foi adotada apenas por G9, que pensou no sentido contrário, como se pode observar na Figura 6.

O grupo G9 compreendeu que a o número de triângulos triplica ao passar de uma figura para outra. Assim, seus integrantes adotaram a estratégia de dividir sucessivamente 2.187 por 3, até obter o último termo da sequência apresentado no enunciado (81 triângulos – figura 5 do Quadro 1). Após isso, associaram as quantidades de triângulos obtidas às respectivas figuras.

Por fim, o grupo G7 adotou uma estratégia que não levaria à solução no problema. Sua estratégia é apresentada na Figura 7.

Figura 7 – Resolução de SM2 elaborada por G7

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$
$$a_{2187} = 1 + (2187-1) \cdot 3$$
$$a_{2187} = 1 + 2186 \cdot 3$$
$$a_{2187} = 1 + 6558$$
$$a_{2187} = 6559$$
$$r = 3$$
$$n = 2187$$
$$\Delta^\circ \text{ termo} = 1$$
$$\begin{array}{r} 2186 \\ \times 3 \\ \hline 6558 \end{array}$$

R = a FIGURA 2187 TERÁ 6.559 TRIANGULOS PRETOS.

Fonte: Registro do grupo G7 (2024)

O grupo G7 considerou, equivocadamente, que a sequência formada pelas quantidades de triângulos das figuras forma uma PA de razão 3 e primeiro termo igual a 1, demonstrando não compreender o enunciado do problema.

Diante das resoluções da situação SM2 apresentadas pelos grupos, observamos a predominância da estratégia de obter os termos da sequência multiplicando o termo anterior pela razão. Essa estratégia foi adotada por 14 grupos e tem relação direta com o conceito de PG. A única estratégia adotada pelos grupos que não tem potencial para se articular ao conteúdo foi a estratégia apresentada por G7, que utilizou equivocadamente a fórmula do termo geral da PA.

Diante dos resultados do nosso estudo, explicamos que, na ação de *articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo*, as estratégias adotadas pelos alunos para resolver a SM1 não permitiram uma articulação imediata ao conteúdo, e, dessa forma, o professor pesquisador julgou necessário apresentar a estratégia previamente elaborada para realizar essa articulação. Essa prática também foi observada nos trabalhos de Souza e Proença (2019), Rozario (2022) e Rozario, Silva e Proença (2023) que apresentaram estratégias previamente elaboradas nessa ação. Esperávamos que os alunos pudessem apresentar estratégias que fizessem uso de conhecimentos prévios relacionados a acréscimos percentuais sucessivos. No entanto, aparentemente não tinham domínio desse conceito, pois não foi utilizado por

nenhum dos grupos. No que diz respeito à SM2, realizamos a articulação ao conteúdo utilizando a estratégia de calcular termo a termo multiplicando pela razão, que foi adotada pela maioria dos grupos.

Conclusões

Esta pesquisa buscou analisar as possibilidades de articulação das estratégias elaboradas pelos alunos ao conteúdo de PG, na abordagem do EAMvRP. Para isso, analisamos as respostas de 16 grupos de alunos do Ensino Médio a duas situações de matemática introdutórias para o conteúdo de PG, que foram implementadas na perspectiva do EAMvRP.

No que se refere à SM1, observamos a predominância da estratégia de calcular os acréscimos percentuais termo a termo, estratégia essa que não se articula imediatamente ao conteúdo de PG. No entanto, a execução dessa estratégia apresentada pelos alunos “era demorado e exaustivo”, conforme aponta A13, o que de certo modo despertou o interesse pela “resposta do professor”, que se materializou na articulação ao conteúdo utilizando a Estratégia 2, que fora elaborada previamente. Quanto à SM2, observamos a predominância da estratégia de multiplicar termo a termo pela razão, que tem potencial para se articular ao conteúdo de PG, uma vez que evidencia a multiplicação pela razão que é característica da PG.

Entretanto, é fundamental que o professor, antes de propor um problema, não apenas faça a previsão das estratégias de resolução, mas também realize um diagnóstico dos conhecimentos prévios dos alunos. Isso porque, a depender dos conhecimentos prévios necessários para a sua resolução, sejam eles inerentes ao contexto ou a aspectos próprios da matemática, podem surgir dificuldades que se tornam obstáculos para a aprendizagem dos novos conteúdos/conceitos.

Nesse sentido, nosso estudo avança em relação aos estudos já produzidos sobre o ensino de Matemática via Resolução de Problemas, abrindo espaço para que propostas de ensino insiram o trabalho de desenvolvimento da compreensão dos alunos das suas estratégias de resolução de problemas em relação ao novo conteúdo. Assim, a proposta de cinco ações da abordagem do EAMvRP de Proença (2018) vai na direção do desenvolvimento da compreensão matemática no sentido da construção do pensamento matemático pelo aluno.

Os resultados obtidos com esse estudo ressaltam a importância da escolha criteriosa do problema, principalmente quanto à possibilidade de articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo. Isso se deve ao fato de que essa ação desempenha um papel central no processo de aprendizagem ao conectar o ponto central no processo de aprendizagem, ao conectar as estratégias dos alunos e conferir significado ao novo conceito. Esperamos que nosso estudo possa servir de respaldo para novas pesquisas na abordagem de EAMvRP. Indicamos, também, que estudos futuros possam ser realizados na abordagem do ensino via resolução de problemas com foco na aprendizagem de conceitos, como a proposta de organização do ensino de Proença (2021a).

Referências

- AKAMINE, C. S.; PROENÇA, M. C. Ensino-aprendizagem de adição de frações via resolução de problemas. *Tecné, Episteme y Didaxis*, n. 52, p. 303-322, 2022.
- ALEVATTO, N. S. G.; ONUCHIC, L. L. R. Ensinando Matemática na sala de aula através da Resolução de Problemas. *Boletim GEPEM*, Rio de Janeiro, v. 55, p. 133-154, 2009.
- ALTOÉ, R. O.; FREITAS, R. C. de O. "O Aniversário Maternaluço da Laura": análise de movimentos epistêmicos na resolução de problemas de estrutura multiplicativa. *Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas*, Belém, v. 21, n. 47, p. 72-87, 2025.
- ARRUDA, A. G. *Ensino de juros compostos, progressão geométrica e função exponencial*. Dissertação (Mestrado) Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Rede Nacional. Departamento de Matemática, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2013.
- BARDIN, L. *Análise de Conteúdo*. Lisboa: Edições 70, 2016.
- BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Portugal: Editora Porto, v. 12, 1994.
- BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018.
- CAI, J.; LESTER, F. Por que o ensino com Resolução de Problemas é importante para a aprendizagem do aluno? Tradução de Antonio Sergio Abrahão Monteiro Bastos e Norma Suely Gomes Allevato. *Boletim GEPEM*, Rio de Janeiro, n. 60, p. 241-254, jan./jun. 2012.
- CHICONATO, Daniele Cristina. *Despoluição de um lago – Progressão Geométrica*. 2013. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013.
- FIORENTINI, D. *Rumos da Pesquisa Brasileira em Educação Matemática: o caso da produção científica em cursos de pós-graduação*. 1994. 414 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 1994.
- GONÇALVES, A. G. N. *Uma sequência de ensino para o estudo de progressão geométrica via fractais*. 2007. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.
- HENSCHER, C. J. *Número áureo e progressões geométricas: a matemática na música*. 2017. 108 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, 2017.
- LILJEDAHN, P.; CAI, J. Empirical research on problem solving and problem posing: a look at the state of the art. *Mathematics Education*, 53, p.723-735, 2021.
- LIMA, W. A. T. de. *Contextualização: o sentido e o significado na aprendizagem de matemática*. 2018. Tese (Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Educação. Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática) – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.
- LIVI, A. *A Teoria da Aprendizagem Significativa aplicada ao ensino de Progressão Geométrica no ensino médio*. 2024. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2024.

LUZ, J. A. da; PROENÇA, M. C. de. Contribuições de uma organização de ensino de sistemas lineares via resolução de problemas no 2º ano do ensino médio. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 27, n. 1, p. 217–246, 2025.

MAIA, R. L. G. *Uma sequência didática para o ensino de Progressão Geométrica por meio de elementos da teoria musical*. 2020. Dissertação (Mestrado em Metodologias para o Ensino de Linguagens e Suas Tecnologias) – Universidade Norte do Paraná, Londrina, 2020.

MELO, C. B. S. *Ensino e aprendizagem de progressões aritméticas e geométricas: Contribuições da metodologia de resolução de problemas*. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática), Área de Ciências Tecnológicas, Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2015.

MILANI, W. N. *A resolução de problemas como ferramenta para a aprendizagem de progressões aritméticas e geométricas no ensino médio*. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

NASCIMENTO, G. P. *Progressões aritméticas, geométricas, harmônicas: aplicações e propostas de atividades*. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Cornélio Procopio, 2017.

NCTM. *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1980.

PINTO, T. L. *Design de problemas e o conhecimento matemático para o ensino de licenciandos em matemática sobre progressões aritméticas e geométricas*. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática – Universidade Franciscana – UFN, Santa Maria, 2021.

POLYA, G. *How to Solve it*. New Jersey: Princeton University Press, 1945.

PROENÇA, M. C. *Resolução de problemas: encaminhamentos para o ensino e a aprendizagem de matemática em sala de aula*. 1. ed. Maringá: EdUEM, 2018.

PROENÇA, M. C. Resolução de Problemas: uma proposta de organização do ensino para a aprendizagem de conceitos matemáticos. *Revista de Educação Matemática*, v. 18, p. e021008-e021008, 2021a.

PROENÇA, M. C. Generalização de padrões algébricos no ensino e aprendizagem de matemática via resolução de problemas: análise de propostas de futuros professores. *Quadrante*, v. 30, n. 2, p. 354–376, 2021b.

PROENÇA, M. C.; MAIA-AFONSO, E. J.; TRAVASSOS, W. B.; CASTILHO, G. R. Resolução de Problemas de Matemática: análise das dificuldades de alunos do 9.º ano do ensino fundamental. *Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas*, Belém, v.16, n. 36, p. 224-243, 2020.

ROZARIO, T. A. *Ensino-aprendizagem de área de triângulo via resolução de problemas: análise sob o enfoque do modelo dos campos semânticos*. 2022. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2022.

ROZARIO, T. A.; MACHADO R. S.; PROENÇA, M. C. Estratégias de alunos do 7º ano na resolução de um problema de subtração de frações no contexto do EAMvRP. *Revista Paranaense De Educação Matemática*, 12(28), 515–532, 2023.

SANTOS, R. R.; CAMPELO, C. S. A.; PROENÇA, M. C. O ensino de logaritmos via resolução de problemas no ensino médio. *ACTIO: docência em ciências*. v. 8, n.3, p. 1-22, 2023.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. *New directions for elementary school mathematics*, v. 31, p. 42, 1989.

SILVA, G. N. *Estudo Farmacológico via Progressão Geométrica e Conjuntos Fuzzy no Ensino Médio*. 2024. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2024.

SOBRINHO, J. A. *A Geometria Fractal na construção de figuras planas envolvendo Progressões Geométricas*. 2024. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Tocantins, Palmas, 2024.

STANIC, G. M; KILPATRICK, J. Perspectivas Históricas sobre Resolução de Problemas no Currículo de Matemática. In: RI Charles, & EA Silver (Eds.), *The Teaching and Assessment of Mathematical Problem Solvin*. Reston, VA: NCTM/Lawerance Erlbaum Associates. p. 1-22, 1989.

VALMORBIDA, J. M. *Uma proposta de Atividades para o estudo de progressões geométricas utilizando fractais e o Software GeoGebra*. 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional) – Universidade Federal da Fronteira Sul, Chapecó, 2018.

VIEIRA, D. C. *O uso da geometria fractal como ferramenta no ensino de progressões geométricas e logaritmos*. 2019. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2019.