95
243
ISSN (versão *online*): 2317-5125
Amazônia
Revista de Educação em Ciências e Matemáticas

Una propuesta pedagógica: utilizando el *software* Geogebra en la rotación de vectores complejos

An educational proposal: using the Geogebra software in the rotation of complex vectors

Agner Lopes Bitencourt[1]
Paulo Roberto Vargas[2]
Vera Lucia Felicetti[3]

Resumen

Este artículo presenta un relato de experiencia de una propuesta pedagógica realizada en una clase de enseñanza superior de la carrera de Licenciatura en Matemáticas, en el ramo de Variables Complejas, sobre el contenido de números complejos e su representación geométrica en el plan Argand-Gauss, más específicamente, sobre la rotación de vectores en dicho plan. La propuesta se inicia con un análisis de libros didácticos y de una disertación de Maestría versando sobre la enseñanza del contenido, donde se puede constatar la necesidad de trabajar con las distintas representaciones de los números complejos para que los alumnos logren un buen aprendizaje. Para la realización de la clase se utilizó un *software* llamado Geogebra, como recurso de tecnología de la información.

Palabras clave: Propuesta Pedagógica, Números Complejos, Representación Geométrica, Tecnología de la Información.

Abstract

This article presents an educational proposal accomplished in a higher education class in the Undergraduate Mathematics, in the discipline Complex Variables, about the content of complex numbers and their geometric representation on the Argand-Gauss plane, more specifically, about the rotation of vectors on the complex plane. The proposal is based on the analysis of textbooks and a master's dissertation involving the teaching of their contents, in which notes the need to work with different forms of representation of complex numbers for students to acquire a good learning. In order to accomplish the proposal, the Geogebra program was used as an information technology resource.

Keywords: Educational proposal, complex numbers, geometric representation, information technology.

[1] Universidade La Salle – UNILASALLE | agnerlb@gmail.com
[2] Universidade do Vale do Rio dos Sinos – UNISINOS | paulo.vargas@unilasalle.edu.br
[3] Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul – PUCRS | verafelicetti@ig.com.br

Introducción

Esta propuesta surgió en la asignatura de Variables Complejas del primer semestre del año de 2014, en la carrera de Licenciatura en Matemáticas del Centro Universitario La Salle, ubicado en la ciudad de Canoas, Rio Grande do Sul, Brasil, donde los académicos deberían elegir un contenido relacionado a los números complejos e desarrollar una propuesta pedagógica a ser presentada a los demás compañeros de la clase, considerando que el currículo del Centro Universitario visa formar profesores para actuar en la Educación Básica[4] y que este contenido pertenece, generalmente, al tercer año de la secundaria[5].

Una vez planteada la propuesta, fue elegido trabajar con la rotación de figuras geométricas en el plan Argand-Gauss, por su interacción con otras formas de representación asociadas a los números complejos, como la forma trigonométrica o polar y la forma algebraica, o sea, para realizar la actividad se necesita conocer los métodos de cálculo de estas formas y, principalmente, sus relaciones para que se pueda aplicarlas al proceso de rotación de figuras planas.

El objetivo de esta propuesta es la aplicación de los conocimientos involucrados a los vectores complejos en la rotación de figuras geométricas en el plan bidimensional Argand-Gauss, cuando, necesariamente las formas polar, geométrica y algebraica deben se relacionar proporcionando al alumno sentido de sus operaciones, a través de sus representaciones intrínsecas al conocimiento matemático.

Esta propuesta se fundamenta en la importancia de la geometría dentro de las matemáticas como ciencia consolidada y las distintas representaciones estudiadas por Raymond Duval en la teoría de la semiótica que ofrecen sentido de los conocimientos al alumno que lo aprehende, así como en la contribución a la formación de profesores donde, comprendiendo lo máximo posible las estructuras matemáticas y discutiendo las formas pedagógicas que se pueden aplicar podrán mejorar la calidad de educación matemática de su comunidad.

Metodología

Tomando como punto de partida la historia del surgimiento de los números complejos, donde el matemático Gauss contribuye substancialmente para las matemáticas elaborando la geometría de estos números, o sea, descubre el modelo real que representa la teoría de este conjunto, esta propuesta se embasa en referenciales teóricos y prácticos que permiten adecuar el plan de clase en su aspecto cualitativo sobre los ejercicios, las explicaciones y la interacción de los alumnos delante el contenido matemático.

Por lo tanto, fueran analizados dos libros didácticos: el libro “Matemáticas” (Matemática, de Manoel Paiva, publicado en 1999, y el libro “Matemáticas, Contexto y Aplicaciones” (Matemática, Contexto e Aplicações), de Roberto Dante, publicado en 2012,

[4] La Educación Básica en Brasil comprende la enseñanza infantil, fundamental y media, conforme artículo 21, Ley nº9.394, de 20 de diciembre de 1996.

[5] Orientaciones Educacionales Complementares a los Parámetros Curriculares Nacionales (PCN+) flexibilizan la enseñanza de los números complejos, dejando a criterio de las escuelas, una vez que se considera contenido aislado de la resolución de ecuaciones.

teniendo como criterio de análisis el estudio de las interacciones entre las formas de representación de los números complejos presentes en los ejemplos, los ejercicios resueltos y los presentados al estudiante, principalmente en el enfoque dado a la representación geométrica.

Se hizo una búsqueda en el sitio electrónico de la *Biblioteca Nacional de Teses e Dissertações*[6], utilizando los buscadores enseñanza de números complejos (ensino dos números complexos), "números complejos, geometría" (números complexos, geometria), "representación geométrica números complejos" (representação geométrica números complexos) y "representación números complejos" (representação números complexos). Los resultados informaran trabajos sobre las aplicaciones reales y demostraciones, o sea, trabajos que tratan de la matemática aplicada o pura, todavía cuatro de ellos se refieren à didáctica de estos números.

De estos cuatro se eligió la disertación "Números Complexos: uma proposta geométrica", de Claudia Rosana da Costa Caldeira, elaborado en su programa de maestría por el Instituto de Matemáticas de la Universidad Federal del Rio Grande do Sul, en el año de 2013, una vez que la intención del trabajo de ella es la misma de nosotros. Luego, su investigación pretende estudiar los números complejos por su representación geométrica, relacionando su historia al largo de las clases posibilitando interaccionar las distintas formas de registros matemáticos proporcionando al estudiante dominio conceptual y práctico conforme la teoría de las representaciones semióticas.

La práctica presentada en este artículo fue desarrollada en la disciplina de Variables Complejas del primer semestre del año de 2014, en la carrera de Licenciatura en Matemáticas del Centro Universitario La Salle, ubicado en la ciudad de Canoas, Rio Grande do Sul, Brasil, durante una clase regular con 12 alumnos de las matemáticas. Fue utilizado el sistema Geogebra[7] en computadoras y *datashow* como herramienta de enseñanza. La clase se desarrolló dialogada-expositivamente a través de cuatro ejercicios de rotación en el plan Argand-Gauss. Todos los ejercicios fueran estructurados y respondidos en el programa por los alumnos. Sin embargo, se considera que la interlocución con el profesor, acá el alumno que estaba ministrando la clase, fue muy importante para la conceptualización e interacción entre las operaciones de suma y producto – trabajadas en la actividad con el sistema Geogebra.

Surgimiento de un nuevo conjunto

Los números complejos aparecen en la historia con los algebristas del siglo XVI, durante la tentativa de calcular raíces cúbicas de un polinomio cualquier. El matemático Nicola Fontana, también llamado Tartaglia (gago en italiano), escribió, en 1531, que había descubierto una regla para solucionar ecuaciones de tercer grado (CALDEIRA, 2013). Este método fue, más tarde, publicado en el libro *Ars Magna*, por Girolamo Cardano (1501-1576), contradiciendo el deseo de Tartaglia de no revelar su descubierta (GARBI apud CALDEIRA, 2006, p.14). Bombelli (1526-1572), aprendiz de Cardano, estudió a fonda el

---

[6] Biblioteca Nacional de Teses e Dissertações. Disponible en <http://bdtd.ibict.br>. Data de acceso: 10 de junho de 2014.

[7] Creado por *The International GeoGebra Institute*. Sistema es gratuito disponible para *download* en http://www.geogebra.org/cms/pt_BR

álgebra de estos números introduciendo la cantidad "piu de meno", que corresponde a -1, enunciando sus reglas de operaciones con ella.

Varios matemáticos se utilizaran de los complejos, mismo sin comprenderlos realmente, destacándose históricamente, y por otras contribuciones, René Descartes (1536-1650), Jean D'Alambert (1717-1783), Euler (1707-1783), Leibniz (1646-1716), Laplace (1749-1827), y mismo Gauss (1777-1855), bien como otros no mencionados en este artículo. Cada uno de ellos trajo contribuciones en el estudio de raíces complejas, como por ejemplo, la cuantidad de raíces reales y complejas conforme el grado del polinomio, las operaciones con estos números: potencias imaginarias, cálculo de logaritmos, funciones trigonométricas, y también, la demostración del Teorema Fundamental del Álgebra pasando a contener las raíces imaginarias, sin contradecir la matemática desarrollada hasta entonces.

Todavía, debemos a Gauss la representación geométrica de los números complejos, haya visto que a presentó a través de modelos visibles la nueva matemática. Esta nueva manera de representar los complejos está comprendida en la naturaleza lógica de las matemáticas organizada en un sistema axiomático compuesto por teoremas iniciales o axiomas que traducen la teoría matemática, por proposiciones que permiten deducir estos axiomas, o mismo demostrar otros teoremas desarrollando la teoría, y por fin, el modelo concreto que propone valores utilizándose de objetos pertenecientes al mundo real, en esto caso la geometría.

Análisis de Libros Didácticos

A partir de los libros pudimos percibir semejanzas en la manera didáctica utilizada por ambos autores durante el contenido de números complejos. En los dos libros se percibe una dinámica *teoría-ejemplo-ejercicios*, o sea, primero se coloca la teoría o definición de una parte del contenido, seguido de ejemplos resueltos paso a paso, y finalizase con ejercicios para el alumno desarrollar.

Se asemejan también en la secuencia de sub-contenidos disponibles, iniciándose con las definiciones de unidad imaginaria y conjugado, trabajando las operaciones con estos conceptos, avanzando para la forma algebraica suida por la representación geométrica. Siguen presentando la forma trigonométrica o polar con sus operaciones básicas, adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y el cálculo de extracción de la raíz. Los dos autores finalizan sus capítulos utilizando las raíces negativas para solucionar ecuaciones del segundo grado.

Los dos libros trabajan diferentemente la historia del surgimiento de los números complejos. Mientras el autor Manoel Paiva empieza su obra citando los matemáticos responsables como Gerônimo Cardano, Nicolo Tartáglia e Rafael Bombelli, juntamente con sus cuestionamientos y deducciones y, por fin, el método que estos utilizaban para solucionar las ecuaciones de tercer grado, el autor Dante presenta apenas el matemático Cardano y su obra *Ars Magna*, definido el conjunto de los números complejos como una ampliación de los números reales.

Con relación a los ejemplos y ejercicios, los autores acuerdan en reforzar las definiciones aplicando situaciones tradicionales, o sea, práctica de algoritmos varias veces, verificando fórmulas e entrenando las mismas. Como comprobación, se puede verificar los ejercicios de pruebas de concursos ofrecidos al final de los contenidos en los dos libros. Sin embargo, el autor Dante trae en su trabajo dos aplicaciones reales de los números complejos, una en la ingeniaría eléctrica y otra en la geometría.

Para introducir la forma geométrica y la forma polar, los dos libros se utilizan de las representaciones en el plan Argand-Gauss, explicando el contenido a partir de ello. Todavía, los ejemplos y ejercicios relacionan solamente la transformación de una forma para otra trabajando apenas el cálculo necesario, no interpretando los efectos que cada operación proporciona al número complejo, de manera que, para el alumno, este proceso se torna mecanizado, por veces, vacío de interpretaciones.

Análisis de la disertación

La disertación *Números Complexos: uma proposta geométrica*, de Cláudia Rosana da Costa Caldeira, propone empezar la enseñanza del contenido por su forma geométrica y sus representaciones, contribuyendo así, para una mejor aprendizaje de los números complejos, o que para ella, se traduce como la capacidad del alumno comprender y argumentar los conceptos involucrados de maneras distintas, en el caso, a través de sus representaciones sea como vector, sea como punto en un plan complejo o sea por su forma algebraica. Esta interpretación se debe a la Teoría de Registros de Representaciones de Raymond Duval.

Para fundamentar su disertación, Caldeira se dispone a estudiar la historia del surgimiento de los complejos, para que su práctica no se embase en la enseñanza corriente del contenido donde ellos son presentados como solución de ecuaciones con raíces negativas, pero si en la interpretación del matemático William Rowan Hamilton (1805-1865) utilizada en el plan de Gauss, donde la parte imaginaria corresponde al eje de las ordenadas y la parte real al eje de las abscisas, permitiendo realizar operaciones entre números distintos, obteniendo resultados idénticos a números complejos, o sea, se encontraban en el mismo conjunto numérico.

Considerando las *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais* (PCN+), Caldeira defiende el retorno del contenido de números complejos para los currículos escolares de la enseñanza secundaria en Brasil, haya visto que las escuelas no lo priorizan más e ya los excluyeran de sus contenidos programáticos. Su defensa se da justo por el estudio a través de la geometría donde se unen la historia, los significados y las aplicaciones del contenido, transformando la aprendizaje mecanizada y "exclusivamente algebraica adoptada por la mayoría de las instituciones" (CALDEIRA, 2013, p.19), de esta manera, se están trabajando también contenidos de geometría y trigonometría en la perspectiva de este nuevo conjunto.

Al paso que analiza ocho libros didácticos destacando la introducción, la definición, las representaciones geométricas y polares, las operaciones en estas formas y los ejercicios contextualizados o no, Caldeira confirma su posición de que la enseñanza está fundamentada en la forma algebraica, porque los autores de los libros didácticos poco disponen de situaciones contextualizadas con las formas geométricas o trigonométricas, y mismo dejando a desear en la relación con la idea de vector, considerando que los alumnos de media ya poseen este concepto y pueden trabajar sin grandes enfrentamientos.

La propuesta de Caldeira, por fin, ocurre en una escuela técnica de electrónica durante nueve encuentros mesclando la historia con las operaciones geométricas durante las clases. La identificación en R2 permitió introducir las operaciones de suma y producto, colocando la forma trigonométrica como indispensable para resolución de productos ordenados. Siguiendo esta orden didáctica fue posible conceptuar la unidad imaginaria *i* como un par ordenado (0,1) en el plan complejo, dejando-se la $\sqrt{-1}$ vista en la forma algebraica. Estas alteraciones corresponden a la teoría de representaciones semióticas propuestas por Duval, o sea, los alumnos se permiten elegir las formas de cálculo conforme el problema presentado.

Fundamentos teóricos

Segundo la teoría de Duval, se define semiótica como la "ciencia de los signos" (SANTANELLA, apud CALDEIRA, 2013, p.41), que se ocupa del estudio de todas las lenguajes, sean verbales o no verbales, como por ejemplo, fotografías, pinturas, arquitecturas, o sea, distintos tipos de expresiones que se dan por registros visuales. Tales representaciones permiten la comunicación del sujeto con el objeto matemático, posibilitando su aprehensión (CALDEIRA, 2013).

En esta correlación entre sujeto y objeto que ocurre lo que Duval describe como "*semiósis* y *noésis*. La *semiósis* es la aprehensión conceptual de un objeto" (CALDEIRA, 2013, p.42), o sea, durante el proceso de aprendizaje la participación pasiva del alumno sobre el contenido para conocerlo y comprenderlo está la idea de *semiósis*, el momento de recepción o absorción de una representación dispuesta. Ya la función activa del sujeto sobre estas representaciones, su busca para entender sus relaciones, está la *noésis*.

Duval (2003) dice que solo habrá aprendizaje matemática con ayuda de representaciones. Siendo en el tránsito de una representación para otra que el sujeto demuestra su comprensión sobre el objeto, que el alumno probará dominio del contenido matemático, respecto a sus funciones, aplicaciones y, principalmente, de sus relaciones. De esta forma no se puede trabajar apenas con las transformaciones de registros uno a otro sin que se comprenda cada relación en el primer registro comparando su nueva forma en el segundo tipo.

Se distinguen dos grupos de registros descritos por Duval (2003): los multifuncionales y los mono funcionales, donde el primero se caracteriza por no utilizar algoritmos en su desarrollo, es como la "lengua natural" (DUVAL, 2003, p.14), se presenta por elementos naturales que asocian situaciones distintas permitiendo manoseo y operabilidad, como las figuras geométricas, mientras el segundo ya se utiliza de algoritmos en su composición, como los sistemas formales matemáticos – sistema decimal, algebraico, ejes ortogonales – con sus operaciones.

Entiende-se que para comprender las matemáticas existe la necesidad de dominar dos tipos de representaciones distintas, la idea de número, por ejemplo, no puede ser mensurada instrumentalmente sin que exista su representación geométrica – donde se puede visualizar determinado tamaño o cantidad – y posteriormente su nombre o signo que representa este tamaño o cantidad perceptible a las demás personas.

Con esto se entiende la necesidad de tomar distintas formas de representar el conocimiento matemático haciéndose responsabilidad de los profesores estudiaren estas formas y trabajarlas pedagógicamente facilitando por un lado el entendimiento de su estudiante, como también, mejorando la calidad de su aprendizaje.

Propuesta Pedagógica

Fueran ofrecidos cuatro ejercicios con aporte de un *datashow* utilizando-se el sistema Geogebra para que los alumnos pudiesen participar de la resolución de las tareas. Los ejercicios están estructurados en orden crecente de dificultad. Primero utilizando la multiplicación directamente y después involucrando la suma y sustracción para "preparar" el problema. Los ejercicios relacionan la rotación con una suma de un nuevo argumento al vector dado.

Actividad 01 – Encuentre las nuevas coordenadas del punto A (3, 4) seguido de una rotación de 90º en el sentido anti-horario en relación a origen.

Las nuevas coordenadas del punto A son – 4 e 3, o sea, A' (- 4, 3), como se puede ver en la imagen 1.

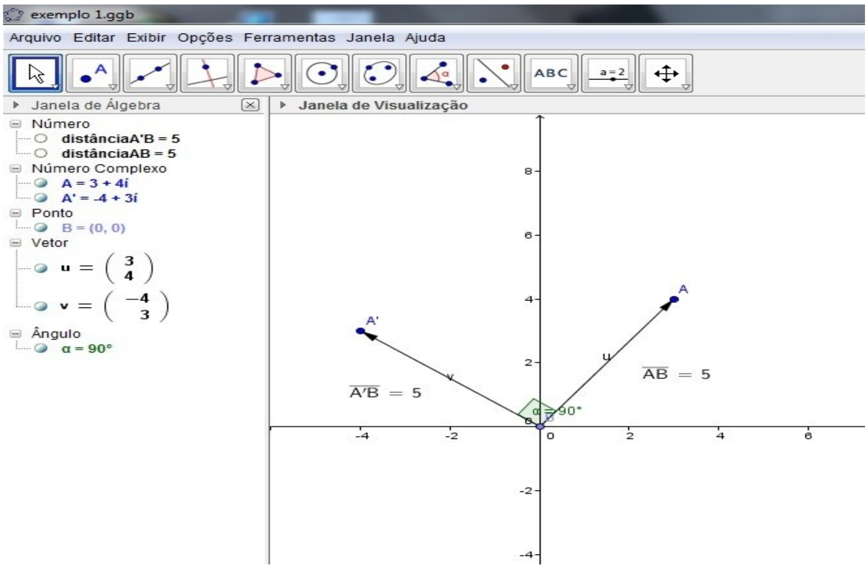

Imagen 1. Resolución actividad 01.

Solución – El punto A (3, 4) representa geométricamente el complejo z = 3 + 4i. Una rotación de 90º en el sentido anti-horario significa una multiplicación por 1(cos90° + i.sen90°).

$$A' = (3 + 4i)\ .\ [1.(\cos 90° + i.\mathrm{sen}90°]$$
$$A' = (3 + 4i)\ .\ [1.(0 + i.1)]$$
$$A' = (3 + 4i)\ .\ i$$
$$A' = -4 + 3i = (-4, 3)$$

Actividad 02 – Encuentre las nuevas coordenadas del punto A(-3, -5) después de una rotación de 60° en el sentido anti-horario en relación a origen.

Solución – El punto A(-3, -5) representa geométricamente o complejo z = -3 - 5i. Una rotación de 60° en el sentido anti-horario significa una multiplicación por 1(cos60° + i.sen60°).

O sea,
$$A' = (-3 - 5i)\ .\ [1.(\cos 60° + i.\mathrm{sen}60°]$$
$$A' = (-3 - 5i)\ .\ [1.(\frac{1}{2} + .\frac{\sqrt{3}i}{2})]$$
$$A' = (-3 - 5i)\ .\ (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$$
$$A' = \frac{-3}{2} - \frac{3\sqrt{3}i}{2} - \frac{5i}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}$$
$$A' = \frac{-3+5\sqrt{3}}{2} - \frac{i(5+3\sqrt{3})}{2}$$

Esto se puede ver en la imagen 2

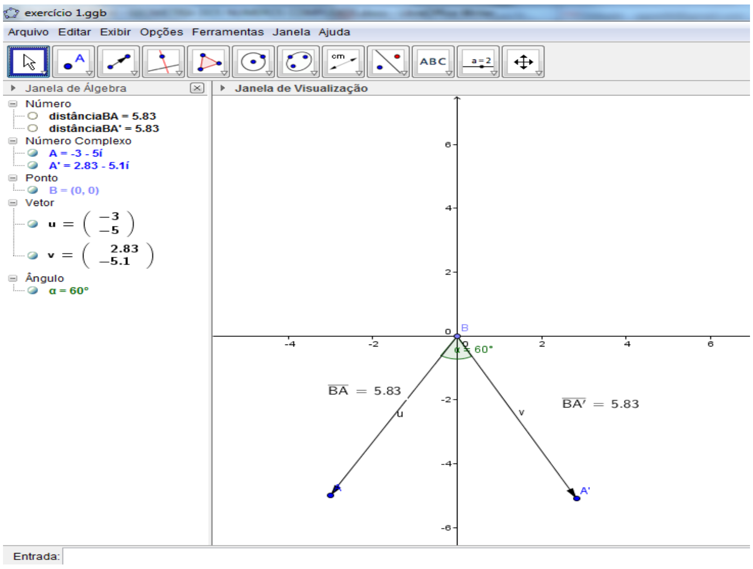

Imagen 2. Resolución actividad 02.

Actividad 03 – Encuentre las nuevas coordenadas del segmento AB, con A(1, 1) y B(3, 4), después de una rotación de 90° en el sentido anti-horario en relación al punto A.

Solución – El punto A (1, 1) y B (3, 4) representa geométricamente os complexos w = 1 + i e z = 3 + 4i. Como la rotación es en A, debemos hacer la rotación apenas el número complejo t que equivale a diferencia z – w (t = z – w = 2 + 3i) y después sumarlo con w. Así como visto en el ejemplo 1, una rotación de 90° en el sentido anti-horario significa multiplicar por i y después sumar t + w, pues la rotación es en A.

$$t' = (2 + 3i) \,.\, i \;=\; - 3 + 2i$$

$$t' + w = -3 + 2i + 1 + i$$

$$t' + w = -2 + 3i$$

Las nuevas coordenadas del punto B son -2 e 3, o sea B'(-2, 3) e A (1, 1) de acuerdo con lo que se puede ver en la imagen 3.

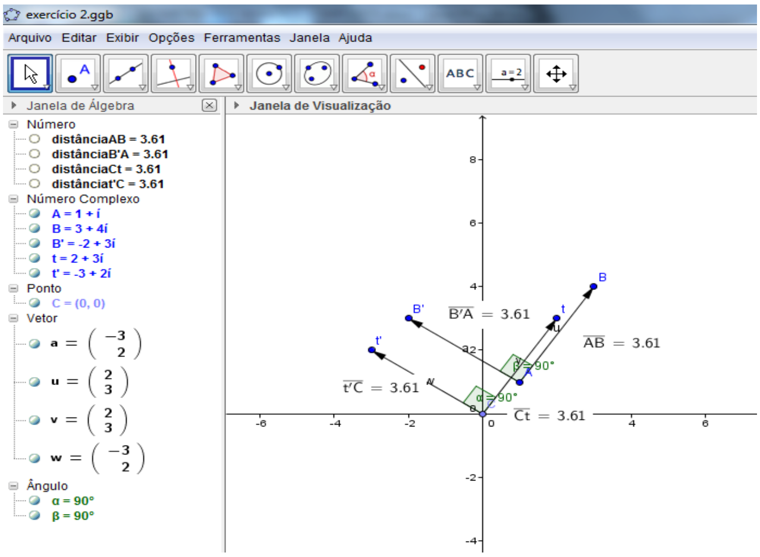

Imagen 3. Resolución actividad 03.

Actividad 04 – Encuentre las nuevas coordenadas del segmento AB, con A (-1, 0) e B(5, -4), seguido de una rotación de 60° en el sentido anti-horario en relación al punto A.

Solución – El complejo responsable por la rotación solicitada es 1(cos 60° + isen60°) = ½ + 3/2i.

A (-1,0) = w = -1

B (5, -4) = z = 5 -4i

El complejo t que representa AB es:

t = z – w = 5 – 4i - (-1) = 6 – 4i

Efectuando la rotación en t, tenemos:

t' = (6 – 4i) . (½ + 3/2i) = (2|3 + 3) + (3|3 – 2)i

Entonces:

t' + w = (2|3 + 2) + (3|3 – 2)i

Luego B'(2|3 + 2 , 3|3 – 2). El punto A se mantiene A (-1, 0) después de la rotación. Esto puede ver en la imagen 4.

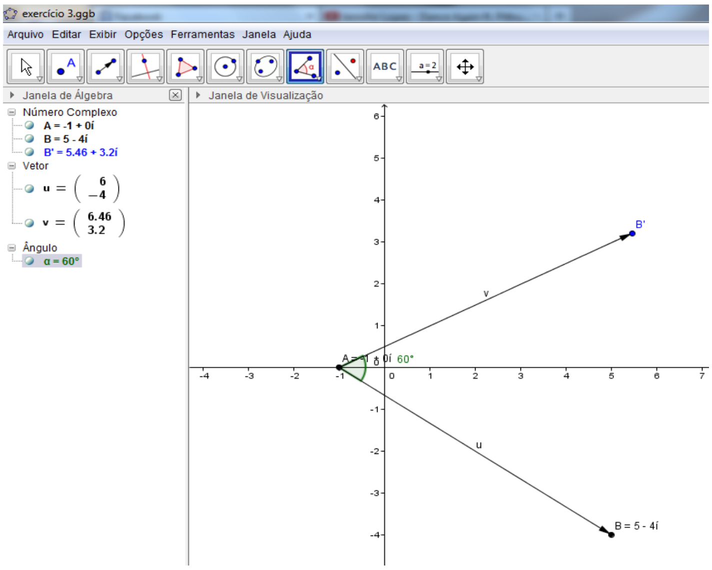

Imagen 4. Resolución actividad 04.

Comentarios

Sobre los ejercicios se necesita comprender que la forma trigonométrica posee dos informaciones esenciales para resolución, la primera está en el módulo del número complejo. Al multiplicar por el ángulo de rotación, estamos multiplicando en verdad por otro número complejo y de esta forma se puede alterar el módulo original, aumentando, disminuyendo o manteniendo el "tamaño" del vector inicial en el gráfico. Y la segunda es el propio ángulo de rotación deseada. Ella tiene la propiedad de se sumar al argumento del vector dado. Al final cuando se quiere rotar un vector se puede construir un número complejo con las informaciones definidas, de modo que este número será un factor de rotación, solucionando el ejercicio.

Otro punto importante, presente en el ejercicio 3 y 4, es que un vector siempre parte del origen, o sea, se estaba trabajando con dos vectores inicialmente con mismo argumento coincidentes en el plan, por esa razón se necesito sustraer uno del otro, porque así sacase la distancia "vacía" de la origen al punto de inicio del vector (punto A). De esta forma se trabaja con un vector desde el origen y se puede rotar con los procedimientos anteriores.

Una vez completa esta tarea se suma el vector A, sacado inicialmente, para que se mantenga la distancia entre la origen y el segmento de vector propuesto por el problema.

Los dos tipos de ejercicios contribuyen para el entendimiento del contenido de números complejos, principalmente porque no se utiliza de procedimientos completamente nuevos y desconocidos por los estudiantes, pero sí, se necesita interpretar cada algoritmo ya aprendido, buscando funciones para cada operación relacionando las intenciones de donde se quiere llegar con el "potencial" de cada componente en las formas geométricas, algebraicas y polares.

Conclusiones

Una vez que los libros didácticos ofrecen una gama de ejercicios de refuerzo y validación de fórmulas, esta propuesta pedagógica, aunque necesite de estos cálculos para su comprensión y desarrollo, objetiva aplicar el conocimiento a situaciones reales ampliando la visión de los alumnos sobre el conocimiento matemático.

La utilización del programa Geogebra permitió estudiar y visualizar los efectos que cada operación genera en un vector dado inicialmente, principalmente la multiplicación que es responsable por la rotación cambiando el valor del argumento inicial, y por interpretación, el aumento o disminución del módulo de este vector. Luego se percibe la necesidad de estudiar los complejos juntamente con la geometría y trigonometría, donde se percibe la primera como el "cuerpo" de los complejos, visible, extensible y maleable en los estudios pedagógicos, mientras la segunda es la herramienta técnica para transformar este "cuerpo", objeto de estudio.

Entiendo que, de esta manera, cada alumno puede crear su campo de conceptos sobre las matemáticas, en especial del contenido de números complejos, dejando una matemática repetitiva con validación de procedimientos algorítmicos y refuerzo de contenidos, conforme la teoría de las representaciones semióticas, presentando así, otra manera de utilizar las matemáticas en situaciones diferentes con recursos que facilitan y auxilian en la interpretación de las mismas.

Referencias

CALDEIRA, C. R. C. **Números complexos:** uma proposta geométrica. 130f. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande Do Sul, Porto Alegre, 2013.

DANTE, L. R . **Matemática, contexto e aplicações.** Volume único. São Paulo: Ática S.A. 2012.

DUVAL, R. **Registro de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática.** In.: Machado, Silvia Dias Alcântara (org.) (2003). Aprendizagem em matemática, registros de representações semióticas. São Paulo: Papirus, p.125-147, 2003.

FEITOSA, F. L. **Aplicações dos números complexos na geometria plana**. 87f. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Centro de Ciências Exatas e da Natureza. Universidade Federal da Paraíba, 2013.

GARBI, G. **A rainha das ciências:** um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2006 Apud CALDEIRA, R. C. Números complexos: uma proposta geométrica. 130f. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande Do Sul, Porto Alegre. 2013.

PAIVA, M. **Coleção base:** matemática: volume único. São Paulo: Moderna, 1999.

SANTANELLA, L. **O que é semiótica.** 9° ed. São Paulo: Brasiliense, 1990 apud CALDEIRA, R. C. Números complexos: uma proposta geométrica. 130f. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande Do Sul, Porto Alegre. 2013.