ISSN (versão *online*): 2317-5125

Fundamentos norteadores das teorias da Educação Matemática: perspectivas e diversidade

Fundamentals guiding mathematics education theories: perspectives and diversity

Saddo Ag Almouloud [1]

Resumo

O presente texto tem por objetivo tecer reflexões acerca de controvérsias sobre a pluralidade de teorias que veem sustentando a área de Educação Matemática e o que é considerado fundamental em sua constituição como campo científico. Além disso, traz à luz alguns fundamentos teóricos da Educação Matemática, com o intuito de comparar a diversidade de seus enfoques. Dividimos o texto em três partes a fim de proporcionar uma melhor visão das ideias centrais de cada uma. A primeira tratamos da Educação Matemática como campo de conhecimento, na segunda parte, discutimos os fundamentos da Educação Matemática e a diversidade nos enfoques. Na terceira parte apresentamos uma discussão e uma síntese dos diferentes construtos teóricos discutidos nas duas primeiras partes, focando no final do texto alguns aspectos da Teoria Antropológica do Didático. Este estudo, apesar de não exaustivo, permite obter uma visão abrangente das diversas teorias existentes, relacionadas ao ensino e à aprendizagem de matemática. A diversidade de teorias e as especificidades de cada uma delas vêm confirmar a ideia de que uma única teoria, ou um único modelo, dificilmente dá conta de explicar e explicitar todos os fenômenos envolvidos nos processos de ensino e de aprendizagem de matemática. O pesquisador deve procurar conhecer bem as ideias principais das diversas teorias, de modo a poder identificar quais delas poderá usar para referenciar teoricamente sua pesquisa.
Palavras chave: educação matemática; ensino e aprendizagem; pluralidade de teorias da educação matemática.

Abstract

The aim of the present text is to reflect on controversies about the plurality of theories that support the area of mathematics education and what is considered fundamental in its constitution as a scientific field. Furthermore, it brings to light some theoretical bases of mathematics education, in order to compare the diversity of its approaches. We divide the text in three parts to provide a better insight into the central ideas of each one of them. The first deals with mathematics education as a field of knowledge. In the second part, we discuss the fundamentals of mathematics education and the diversity in approaches. In the third part, we present a discussion and a synthesis of the different theoretical constructs discussed in the first two parts, focusing, at the end of the text, on some aspects of the Didactic Anthropological Theory. This study, although not exhaustive, allows a comprehensive view of the various existing theories related to mathematics teaching and learning. The diversity of theories and the specificities of each of them confirm the idea that a single theory, or a single model, can hardly explain and reveal all the phenomena involved in the processes of teaching and learning mathematics. The researcher should pursue sound knowledge of the main ideas of the different theories, so that they can identify which of them they can use to refer theoretically their research.
Keywords: mathematics education; teaching and learning; plurality of theories in mathematics education.

[1] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo | saddoag@pucsp.br

Introdução

Segundo Sriraman e English (2010), dada a complexidade dos processos de ensino e de aprendizagem, a diversidade das teorias utilizadas em Educação Matemática, apoiadas em várias áreas de conhecimento como a ciência cognitiva, sociologia, antropologia, as neurociências etc., é natural e necessária. Assim, a gama de teorias e modelos de ensino e aprendizagem que pesquisadores têm desenvolvido em Educação Matemática, tem levado à escolha de uma ou mais teorias para tratar as questões empíricas cada vez mais desafiadoras. Porém, há autores que consideram fundamental o desenvolvimento de quadros teóricos universais, o que tem sido problemático para a Educação Matemática. Estes motivos nos levaram a elaborar este artigo

O presente artigo tem por objetivo tecer reflexões acerca de controvérsias na construção da área de Educação Matemática, em particular, no tocante a teorias que vêm sustentando pesquisas da área.

Dividimos nosso texto em três partes a fim de proporcionar uma melhor visão das ideias centrais de cada uma. Na primeira discutimos a Educação Matemática como um campo de conhecimento em construção, na segunda tratamos de alguns fundamentos teóricos da Educação Matemática, exibindo a diversidade em seus enfoques. No final do artigo, apresentamos uma discussão e uma síntese contendo os principais elementos teóricos que contribuem para constituição da área de Educação Matemática.

Para levar a cabo as reflexões tecidas na primeira parte deste artigo utilizamos principalmente os textos "Surveying theories and philosophies of mathematics education", "Theories of Mathematics Education", e "Theories of Mathematics Education: is plurality problem?"[2].

Destinamos na segunda parte um espaço para discussão de algumas teorias da Educação Matemática. Para trazê-las à luz utilizamos os textos "La théorie des situations didactiques – le cours de Montréal" de Brousseau, "On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin", "Reflections on APOS theory in elementary and advanced mathematical thinking", "Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory", "The fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical frameworks"[3].

Educação Matemática (EDM): um campo de conhecimento

Neste tópico apresentamos um panorama geral, mas não exaustivo sobre as discussões que vêm sendo realizadas acerca da EDM, suas teorias, filosofias, metodologias. Escolhemos cinco artigos que esclarecem alguns pontos importantes no debate da EDM como uma nova área de conhecimento.

---

[2] In Theories of Mathematics Education: Seeking New Frontiers, Org. Bharath SriramanetLyn English, 2010, collection ADVANCES IN MATHEMATICS EDUCATION

[3] Esses 4 últimos artigos são publicados no livro Theories of Mathematics Education: Seeking New Frontiers, Org. Bharath SriramanetLyn English, collection Advances in Mathematics Education.

Teorias e Filosofia da Educação matemática[4]

O artigo de Sriraman e English (2010) tem por objetivo oferecer uma ampla discussão sobre as teorias e filosofias da EDM a fim de mostrar que esta é um campo de investigação com uma longa história entrelaçada com a psicologia, que essa área não só tem crescido rapidamente nas últimas três décadas, mas também tem sido fortemente influenciada e moldada pelas dimensões sociais, culturais e políticas da educação, do pensar e aprender.

Sriraman e English (2010) trazem algumas questões para reflexão acerca da Educação Matemática, sendo elas: A teoria em Educação Matemática existe? Quais são as mudanças na teoria, nas últimas décadas e o impacto sobre a educação matemática? Quais são as escolas europeias de pensamento sobre o desenvolvimento da teoria, especialmente da escola francesa? Quais são os rumos e possibilidades? Desenvolvemos as nossas teorias ou pedimos emprestado ou até mesmo adaptamos de outras disciplinas? Se precisarmos de uma teoria para tudo, como vamos lidar com múltiplas teorias, muitas vezes conflitantes? Por que diferentes nações ignoram uma ou outra teoria? Sem pretendermos adentrar estas questões, passamos a outras considerações acerca do que escreveram estes autores.

Kilpatrick (2010), que escreveu o prefácio do livro em que se encontra o artigo destes autores, afirma que eles começam apontando que cada uma das teorias deve esclarecer sua ontologia, metodologia e epistemologia e que estas poderiam formar as bases filosóficas da EDM. Mas que, de qualquer forma, a principal mensagem que pretendem passar é que "Educadores matemáticos precisam aproximar pesquisa e prática por meio de um sistema organizado de conhecimentos que lhes permitam ver além das especificidades de cada uma e explicar como elas funcionam juntas[5]" *(p.5)*.

Sriraman e English (2010) também apontam as influências das teorias da psicologia na construção das teorias em EDM, entre elas destacam-se as teorias do desenvolvimento do conhecimento de Piaget, o construtivismo radical de Von Glasersfeld, as teorias de Vygostky sob a ótica de Paul Cobb e Bauersfeld Heinrich do construtivismo social, e o livro Provas e Refutações de Irme Lakatos.

Quanto ao desenvolvimento das teorias em EDM, os autores argumentam que a diversidade, presente nas novas teorias utilizadas no ensino de matemática a partir de domínios como a ciência cognitiva, sociologia, antropologia e neurociência, é natural e necessária, dada a complexidade dos processos/situações de ensino e aprendizagem em matemática. Eles também explicam que o desenvolvimento de quadros teóricos "universais" tem sido problemático para a EDM e que um fórum de pesquisa sobre este tópico foi organizado por eles no 29º encontro anual do Grupo Internacional de Psicologia da Educação Matemática (PME29) realizado em Melbourne.

Sriraman e English (2010) apontam que o fato de os pesquisadores em EDM terem à sua disposição uma gama de teorias e modelos de ensino e aprendizagem, escolher a mais apropriada – isolada ou conjuntamente – para tratar de questões empíricas é cada vez mais desafiador.

---

[4] SRIRAMAN, B.; ENGLISH, L. Surveying Theories and Philosophies of Mathematics Education. In: SRIRAMAN, B.; ENGLISH, L. Theories of Mathematics Education Advances in Mathematics Education. SPRINGER, 2010, pp. 3-32.

[5] Mathematics educators need to bring research and practice together through an organized system of knowledge that will enable them to see beyond the specifics of each and explain how they can work together. (KILPATRICK, 2010, p.5)

Os autores, ainda, fazem uma reflexão sobre a busca da identidade da EDM apoiados nas ideias de Eisenberg e Fried (2009, p. 143, apud SRIRAMAN e ENGLISH, 2010, p.12, tradução nossa) que afirmam: "Nosso campo parece atravessar uma fase de auto definição, uma crise na qual teremos que decidir quem somos e em que direção estamos indo. "

Sobre a criação de uma teoria única para a Educação Matemática, Sriraman e English afirmam que o desenvolvimento de uma grande teoria da Educação Matemática poderia ser útil no fornecimento de garantias de identidade de nosso campo e autonomia intelectual dentro de aparentemente áreas mais amplas como educação, psicologia ou Matemática, que é arrogante supor que uma grande teoria única irá fornecer uma base adequada para a tomada de decisões para questões mais importantes que surgem na vida.

Sriraman e English (2010) enfatizam a influência das escolas europeias no campo da EDM, desde a virada do século XIX cuja origem reside na tradição clássica de Félix Klein na agenda estruturalista influenciada por Bourbaki e Dieudonné no seminário Royaumont, seguida da nova concepção de Freudenthal sobre educação matemática com ênfase no elemento humanista de fazer matemática. Além disso, ainda abrem um espaço para discutir acerca da *Didactique des Mathématiques* (DDM), passando pela Teoria das Situações Didáticas (TDS) de Guy Brousseau e Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Yves Chevallard (das quais destrincharemos os principais aspectos neste artigo).

Destacamos também a resposta destes autores a respeito do por que precisarmos de teorias:

> Teorias são úteis porque direcionam a atenção dos pesquisadores para relações particulares, fornecendo significado para os fenômenos estudados, avaliam a relativa importância da questão de pesquisa, e as descobertas de estudos individuais dentro de um contexto mais amplo. Teorias sugerem para onde olhar quando formular as próximas questões de pesquisa e fornecem um esquema organizacional, ou uma linha histórica, dentro da qual se acumulam e ajustam-se conjuntos individuais de resultados. (SILVER & HERBST, 2007. HIEBERT & GROUWS, 2007, apud Sriraman e English, 2010, p. 24, tradução nossa).

Eles concluem que a Educação Matemática é um campo de investigação que tem uma longa história de entrelaçamento com a Psicologia, e que esse campo tem crescido e sido moldado por influências do social, cultural e as imersões das políticas da educação. Embora o campo da Educação Matemática crescesse muito nas últimas décadas, ainda a muito a avançar.

Observa-se, no artigo de Sriraman e English (2010), a preocupação com a busca da identidade da Educação Matemática, uma área de conhecimento em consolidação.

Teorias da Educação Matemática[6]

As reflexões tecidas aqui são oriundas de uma publicação que é produto de um fórum de pesquisa coordenado por Lyn English e Bharath Sriraman, promovido pela PME[7] 29 e

---

[6] ENGLISH, L.; SRIRAMAN, B. (coord.) RF04: Theories of Mathematics Education. In: Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.) Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1, pp. 170-202. Melbourne: PME, 2003. Disponível em: < http://www.emis. de /proceedings/PME29/PME29CompleteProc/PME29Vol1Complete.pdf> Acesso em: 25 jun. 2012.

que apresenta um debate crítico sobre as teorias da Educação Matemática e o uso que se faz delas a fim de considerar as direções a serem tomadas no progresso da Educação Matemática. Há uma discussão sobre por que as teorias são essenciais para o trabalho de educadores matemáticos e remete a algumas possíveis razões do porquê pesquisadores as ignoram ou não as compreendem e as utilizam indevidamente. São também abordadas questões sobre o processo evolutivo da natureza da cognição humana, o uso da teoria para avançar nossa compreensão acerca do desenvolvimento cognitivo do aluno, os modelos e perspectivas de modelagem. Nesta publicação os autores pretenderam fazer um levantamento crítico sobre as tradições da didática da matemática europeia, particularmente a da Alemanha e compará-la com as tendências históricas em outras partes do mundo.

Este fórum de pesquisa (RF04) contou com a participação de vários pesquisadores que elencamos a seguir e apontamos suas ideias gerais.

Frank Lester (2005) discorre sobre o lugar da teoria na pesquisa em Educação Matemática e especula sobre o porquê de tantos pesquisadores parecerem não compreender ou fazer uso indevido de teorias, e ainda sugere como podemos pensar sobre os objetivos de pesquisa que podem ajudar a eliminar esse mal-entendido e uso indevido. Lester (2012, p. 174-175) destaca quatro equívocos mais comuns sobre a teoria: (1) Há uma crença entre alguns pesquisadores que os teóricos fazem seus dados se adequarem a sua teoria. (2) Os dados coletados muitas vezes devem ser despojados de contexto a fim de servir a teoria. (3) Conclusões produzidas pela lógica do discurso teórico muitas vezes não são úteis para a prática do dia a dia. (4) Não há triangulação, ou seja, utilizar uma única perspectiva teórica não permite avaliar os pontos fortes/fracos, fazer adequações e suscitar explicações da teoria. E, aponta três razões do por que a teoria deve desempenhar um papel indispensável em nossas pesquisas: (a) Não existem dados sem teoria: A perspectiva teórica utilizada permite dar sentido a um conjunto de dados coletados pelo pesquisador. (b) Uma boa teoria transcende o senso comum: Um profundo conhecimento proveniente da preocupação com a teoria em construção é muitas vezes essencial para lidar com problemas realmente importantes. (c) Há necessidade de compreensão profunda: Não se deve simplesmente encontrar soluções para problemas imediatos, mas desenvolver uma compreensão densa acerca do conhecimento.

Stephen Lerman (2005) discursa sobre a pluralidade das teorias em Educação Matemática. Ele estende a discussão proposta por Lester e apresenta os quadros teóricos mais frequentemente utilizados nos artigos do PME no período de 1990-2001 (Quadro 1). Sua análise revela uma grande variedade de teorias utilizadas pelos pesquisadores do PME com uma preferência distinta pelas teorias sociais sobre as teorias cognitivas, abrindo assim uma interessante discussão acerca de se as teorias sociais utilizadas neste período revelam uma distribuição geográfica distinta, e se é assim, por quê?

Lerman (2012) não se surpreende pela multiplicidade de teorias no campo de EDM, nem vê como um obstáculo essa gama de teorias e os debates acerca de seus méritos. O autor afirma que, em uma investigação, tem que se dar certo distanciamento da prática para que sejamos capazes de dizer algo sobre ela. Os resultados da pesquisa em sala de aula exigem um processo de recontextualização; a procura por um critério simples em

[7] International Group for the Psychology of Mathematics Education

termos de eficácia é entrar em um complexo conjunto de questões. Ele diz que ignorar essa complexidade é perder a possibilidade de crítica.

Quadro 1 – Campos teóricos

Ano	Campos Teóricos da Psicologia Educacional e/ou da Matemática
1990	Brousseau
1991	Filosofia da matemática
1992	Vygotsky
1993	Vygotsky
1994	Brousseau, Chevallard, Pós-estruturalismo
1995	Embodied Cognition, Pesquisas Educacionais
1996	Vygotsky, Cognição Situada, Filosofia da Matemática
1997	Cognição Situada, Vygotsky, Filosofia da Matemática
1998	Cognição Situada, Vygotsky, Filosofia da Matemática
1999	Prática sócio-histórica
2000	Chevallard
2001	Semiótica, Bourdieu, Vygotsky, Filosofia

Fonte: Lerman (2005, p. 181)

Luis Moreno Armella (2010) apresenta uma perspectiva evolutiva sobre a natureza da cognição humana, particularmente a evolução das representações, que ele apropriadamente chama de pré-teoria. Pare ele a EDM está na intersecção de uma ciência (matemática) e de uma comunidade de práticas (educação). Ainda para este autor, a matemática é uma disciplina diferente das ciências naturais devido a sua natureza estritamente simbólica. Tal característica faz uma grande diferença e dá à educação matemática, um campo de pesquisa de caráter distinto de outros campos científicos, como a biologia[8], por exemplo.

Para Armella (2010), a forte presença dos computadores introduziu novos olhares tanto na simbologia quanto na cognição em matemática. Esses fatores oferecem uma potencialidade de reforma dos objetivos em todo campo de pesquisa. Segundo o autor, a urgência de cuidar de ensino e aprendizagem das atividades de investigação resultou em práticas sem teorias correspondentes.

Armella (2010) chegou a pensar que apenas as explicações locais eram possíveis a área de Educação Matemática, pois as teorias locais podem ser a resposta para a grande quantidade de explicações que encontramos à nossa volta. Mas mesmo local, uma teoria da educação matemática deve ser desenvolvida a partir de um andaime que, eventualmente, se cristaliza na teoria e parte desse andaime é constituída pela própria matemática, e por uma comunidade de prática.

[8] Ele não quer dizer que não há desenvolvimento de abstração ou conceito envolvido nesses outros campos.

John Pegg e David Tall(2010) comparam as teorias neo-piagetianas, a fim de usar as semelhanças e diferenças entre elas para tratar de questões fundamentais na aprendizagem. Eles identificam dois tipos de teorias de desenvolvimento cognitivo: teorias globais de desenvolvimento em longo prazo, como a teoria dos estágios de Piaget; e as teorias locais de desenvolvimento conceitual como o esquema Ação-processo-objeto da teoria de Dubinsky ou a sequência abstrata uniestrutural-multiestrutural-relacional-uniestrutural do modelo SOLO de Biggs e Collis. O quadro 2 apresenta as teorias relativas ao primeiro tipo e o quadro 3 relativas ao segundo tipo.

Quadro 2 – Estágios globais do desenvolvimento cognitivo

Estágios de Piaget	Níveis de van Hiele	Modos SOLO	Modos de Bruner
Sensório motor Pré-operacional Operacional concreto Operacional formal	I - Reconhecimento II - Análise III - Ordenação IV - Dedução V - Rigor	Sensório motor Icônico Simbólico concreto Formal Pós-formal	Enativa Icônico Simbólico

Fonte: Pegg & Tall (2010, p.175, tradução e adaptação nossas)

Quadro 3 – Ciclos locais de desenvolvimento cognitivo

SOLO (Biggs & Collis)	Davis	APÓS (Dubinsky)	Gray & Tall
Uni-estrutural Multi-estrutrual Relacional Uni-estrutural	Procedimento (VMS) Processo Integrado Entidade	Ação Processo Objeto Esquema	[Objetos de base] Procedimento Processo Procept

Fonte: Pegg & Tall (2010, p.182, tradução nossa)

Pegg e Tall não defendem a construção de uma teoria unificada, mas uma abordagem que procura compreender os significados implícitos em cada teoria ampla e ver onde cada uma pode lançar luz sobre a outra, observando suas correspondências teóricas e/ou dissonâncias.

O exposto até aqui traz a questão sobre a produção de uma teoria universal para a EDM, pois, nesta questão, os autores supracitados trazem contrapontos e apresentam pontos desfavoráveis e levantam pontos favoráveis. Por isso, no próximo item nos dedicamos à discussão sobre a pluralidade de teorias da Educação Matemática.

Teorias da Educação Matemática: a pluralidade é um problema?[9]

Este trabalho de Stephen Lerman (2010) traz as ideias apresentadas por ele no PME 29 no *Research Forum 04* (RF04) que foi apresentado anteriormente. O autor chama atenção para o aumento das investigações em Educação Matemática em quantidade, mas também em diversidade de teorias. Ele apoia-se nos aspectos da sociologia de Basil Bernstein para analisar fenômenos da diversidade destas teorias e comentar seus efeitos sobre as pesquisas em Educação Matemática. Lerman não vê a multiplicidade e divergências das teorias como um obstáculo e sim como um desafio indispensável para responder a questões complexas da área.

O estudo mostra que há uma crescente gama de teorias que estão sendo utilizadas em EDM, mas que existem elementos suficientes para despertar preocupações sobre como tais teorias têm sido utilizadas.

Lerman (2010, p.107) afirma que a descrição da estrutura horizontal de conhecimento proposta por Bernstein certamente se aplica na pesquisa em EDM. E, diz também que teorias não desaparecem, e que tanto em número como em variedade, elas estão se proliferando, e que esta expansão está tomando uma direção social, teorias mais socioculturais, discursivas e sociológicas, em grande parte dentro de um modelo liberal-progressista baseado em teorias Vygotskyianas, porém há uma preocupação dos efeitos sobre os alunos oriundos de meios desfavorecidos (Figura 1).

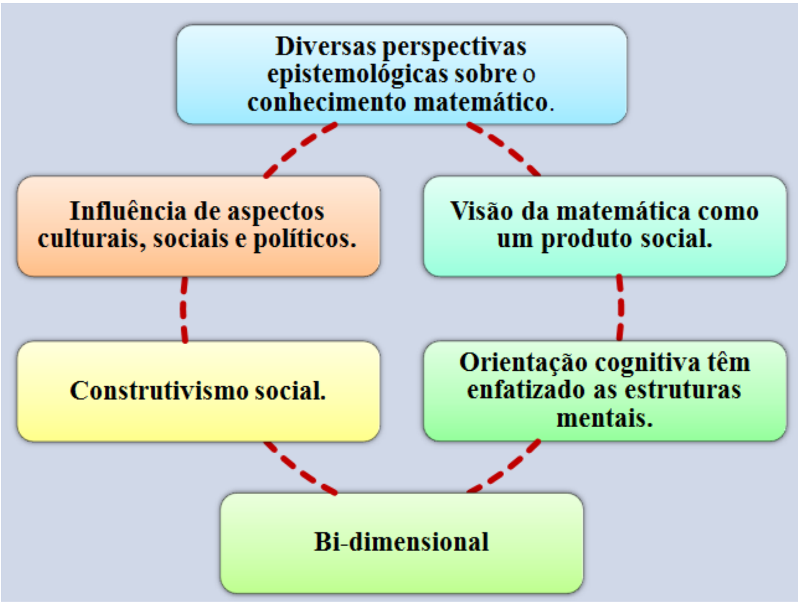

Figura 1: Influências de teorias. **Fonte**: construção do autor

Lerman apresenta uma perspectiva de modelos e modelagem inovadora, que combina as teorias de Piaget e Vygotsky de forma pragmática para abordar o desenvolvimento e uso real do conhecimento Por meio de construção de modelos.

---

9 LERMAN, S. Theories of Mathematics Education: Is Plurality a Problem? In: SRIRAMAN, B.; ENGLISH, L. **Theories of Mathematics Education Advances in Mathematics Education**. SPRINGER, 2010, pp. 97-117.

Com relação às estruturas horizontal e vertical, apresentamos na figura 2 elementos que caracterizam essas duas esturaras.

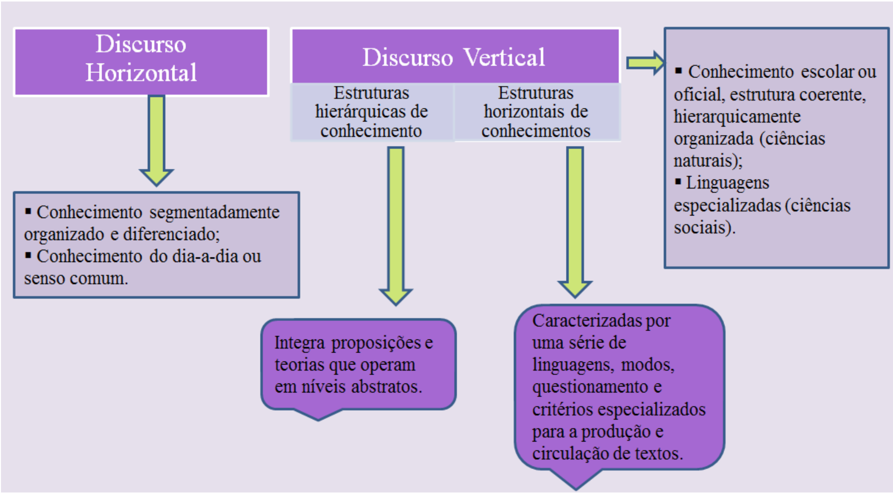

Figura 2: Estruturas horizontal e vertical. **Fonte**: construção do autor

Neste esquema (figura 2) é possível que no discurso horizontal, o conhecimento seja organizado de forma segmentada, enquanto que o discurso vertical integra proposições e teorias que operam em níveis abstratos, mas também por uma série de linguagem, modos e critérios especializados para a produção e circulação de textos científicos.

No próximo tópico apresentaremos algumas teorias que atendem a estes critérios.

Fundamentos da Educação Matemática: diversidade nos enfoques

Neste tópico apresentamos as principais ideias de algumas teorias da EDM, com o intuito de apontar algumas de suas semelhanças e diferenças.

Didática da matemática

Os fatores que interferem no ensino e na aprendizagem de matemática têm despertado o interesse de vários pesquisadores da área de Educação Matemática. As pesquisas desenvolvidas seguiram diferentes direções. Escolhemos discutir nesta parte algumas das noções e concepções de Didática da Matemática desenvolvidas na escola francesa, mais especificamente a Teoria das Situações Didáticas (TSD) e a Teoria Antropológica do Didático (TAD).

1. A Didática da Matemática se desenvolveu na França a partir dos anos de 1970 no contexto marcado pela reforma da Matemática Moderna, pela criação dos IREM (Instituto de Pesquisa sobre Ensino da Matemática) e pelo sucesso das teorias psicológicas de Piaget sobre o desenvolvimento da inteligência e a aquisição de conceitos fundamentais, focou, em primeiro lugar, os problemas de ensino de conceitos matemáticos em razão das exigências próprias ao saber

matemático. Nesse sentido, recorreu à análise epistemológica e histórica. A intervenção de professores foi analisada em relação ao que eles deveriam introduzir e à maneira de introduzi-lo para a aquisição do conceito. No entanto, percebeu-se que não se deve limitar-se ao estudo da classe, é preciso levar em consideração a organização do sistema educativo (programas, currículo, material pedagógico – livros didáticos... -, horários...).

2. Os avanços das pesquisas em Didática da Matemática conduziram a pensar na constituição de uma área cientifica que investiga os processos de ensino e de aprendizagem de conceitos matemáticos. Partindo desse princípio, a Didática da Matemática é definida como sendo a ciência da educação cujo propósito é o estudo de fenômenos de ensino e de aprendizagem, mais especificamente, é o estudo de situações que visam à aquisição de conhecimentos/saberes matemáticos pelos alunos ou adultos em formação, tanto do ponto de vista das características dessas situações, bem como do tipo de aprendizagem que elas possibilitam. É importante observar nessa definição a distinção entre ensinar e aprender. Essa distinção permite refletir sobre a diferença entre os objetos de um ensino, as intenções do professor e a realidade dos conhecimentos adquiridos pelos alunos.
3. A Didática, como ciência, não é caracterizada somente pelo fato de propor um projeto de estudo científico de problemas de ensino da matemática. No início, os estudos didáticos consistiram em considerar como primeiro objeto a estudar - a questionar, a modelar e a problematizar segundo as regras da atividade cientifica - essencialmente o saber matemático, bem como a atividade matemática, não se preocupando com o aprendiz, nem com o professor. Para explicar os fatos do ensino, a didática postulava que o "mistério" está na matemática e não nos sujeitos que devem aprender ou ensinar a matemática.

A abordagem clássica estuda os problemas relacionados com a transmissão e aquisição de noções matemáticas pelo aluno. Nessa concepção, a problematização parecia situar-se essencialmente na capacidade cognitiva, nas concepções e preconcepções de aprendizes ou professores. Mas, esses aspectos foram estudados de uma maneira estanque e sem uma análise profunda de suas possíveis relações.

Tendo em vista esse paradigma que dominava os estudos didáticos, podemos inferir que a problemática de ensino e aprendizagem da Matemática trazida pela **Teoria das Situações Didáticas (TSD)** (BROUSSEAU, 1986), é uma *primeira ruptura* que considera a *matemática como a essência dos fenômenos didáticos*. O desejo de elaborar uma ciência cujo objetivo é estudar os fenômenos de ensino e de aprendizagem da matemática constitui a *segunda ruptura*, ruptura que levou os pesquisadores a explicitar modelos teóricos e a submeter esses modelos à lei de uma verdadeira "epistemologia experimental".

Vale ainda destacar que, em relação à visão clássica sobre o saber matemático, a teoria das situações traz ainda uma nova ruptura epistemológica fundamental. Ela supõe, de fato, que os *conhecimentos matemáticos só podem ser compreendidos pelo intermédio de atividades que eles permitem realizar, ou seja, resolver*. A matemática é, antes de tudo, uma *atividade que se realiza em situação e contra um meio*. Além disso, trata-se de uma atividade *estruturada*, na qual se podem destacar diferentes fases: ação, formulação e validação, bem como a devolução e a institucionalização.

4. Nessa visão, a prioridade é dada à organização própria das noções científicas a adquirir. O trabalho de aprendizagem não vai mais ser analisado só em nível do sujeito, mas também ao nível de um grupo de sujeitos e de interações entre sujeitos de um grupo.
5. A noção prévia para bem compreender a Teoria das Situações Didática é a de "situação" ou exatamente de "conjunto de situações" que o professor deve organizar para permitir uma aprendizagem. Nesse sentido, Brousseau (1986) afirma que um processo de aprendizagem pode ser caracterizado de modo geral, (se não) determinado, por um conjunto de situações identificáveis (naturais ou didáticas) reprodutíveis e provocando modificações de um conjunto de comportamentos dos alunos, modificação característica da aquisição de um conjunto de determinados conhecimentos. Cada uma dessas situações, bem como o processo inteiro, coloca, então em presença: 1) um saber; 2) sujeitos. 3) meios (des milieux) didáticos. A descrição do conjunto de situações pode ser substituída por modelos de alunos, de professor, de concepção da maneira de ensinar e por leis de evolução desses modelos..." (BROUSSEAU, 1986 apud PERRIN-GLORIAN, 1994, p. 102-103)
6. Essa noção de "conjunto de situações" permite aplicar a ideia piagetiana de desenvolvimento por "equilibração", e de aprendizagem, por adaptação do sujeito ao meio, mas, aqui, o meio (milieu) é tomado no sentido psicossocial: trata-se do meio institucional e relacional, da classe na qual a relação com o professor vai ser privilegiada, num primeiro momento, (PERRIN-GLORIAN, 1994, p. 107).
7. A Teoria das Situações Didática dá ênfase à dimensão social e à dimensão histórica, na aquisição dos conhecimentos. Os processos de aquisição dos conhecimentos não são mais encarados em nível dos sujeitos, mas em nível da classe: a aquisição deve resultar de um processo de adaptação dos sujeitos às situações que o professor organizou e nas quais as interações com os outros alunos vão ter um papel importante.

Outra contribuição importante é a Teoria Antropológica do Didático (TAD) desenvolvida por Yves Chevallard (1999). Esta teoria é uma contribuição importante para a Didática da Matemática, pois além de ser uma evolução do conceito de transposição didática, inserindo a didática no campo da antropologia, focaliza o estudo das organizações praxeológicas didáticas pensadas para o ensino e a aprendizagem de organizações matemáticas.

A Didática da Matemática vista no campo da antropologia do conhecimento (ou antropologia cognitiva) considera o seguinte: *tudo é objeto*, fazendo a distinção dos tipos de objetos particulares: *as instituições, os indivíduos e as posições* que os indivíduos ocupam nas instituições. Ocupando essas posições, os indivíduos tornam-se os *sujeitos* das instituições.

Uma das contribuições da teorização de Yves Chevallard situa-se no fato de que um objeto ostensivo é considerado, em primeiro lugar, como *instrumento* possível da atividade humana, isto é, como uma entidade que permite, em associação com outras entidades, a execução de uma tarefa. Além disso, a *problemática ecológica* (CHEVALLARD, 1999) amplia o campo de análise e permite abordar os problemas que se criam entre os diferentes objetos do saber a ensinar. Nessa visão, os objetos possuem *inter-relações* hierárquicas que permitem entrever "*estruturas ecológicas entre os objetos*".

Em relação ao professor, descrever sua atividade é um projeto de pesquisa ambicioso, pois a atividade do professor é complexa. Nesse âmbito, vários pesquisadores estão analisando os conhecimentos do professor, o modo pelo qual podem ser identificados por um pesquisador, e a evolução possível desses conhecimentos na atividade profissional do professor. Um tema ainda em discussão trata das "*Rotinas*" *e* "*regulação*" *nas práticas do professor*. Este tema coloca questões relacionadas com a compreensão do trabalho do professor, suas lógicas de ação e de seu sistema de decisão que orienta sua ação. Faz-se a hipótese que as "rotinas" profissionais e os sistemas de suas interregulações, consideradas como tipo de ação didática no sistema de transmissão escolar dos saberes permitem evidenciar a estabilidade de certas práticas.

Uma das preocupações de pesquisadores em Didática da Matemática é a problemática das práticas docentes e dos efeitos potenciais dessas práticas sobre a aprendizagem dos alunos, bem como o trabalho especifico do professor (ROBERT, 2001). Segundo Brousseau (1986), a análise do professor deve ser feita tendo em conta a modelização de seu jogo e interações didáticas na classe e analisando o sentido de certos eventos e as decisões ligadas a estes.

Apoiando-se na Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1999), pesquisadores procuram caracterizar as tarefas do docente usando um modelo mais geral que permite compara-las com a organização praxeológica de outros tipos de tarefas, como por exemplo, as tarefas matemáticas.

Outras pesquisas focam a análise da cooperação entre aluno e professor, a interpretação de certas decisões do professor em termos de intenções (intenção pessoal) e em termos de intenções didáticas, com relação ao sentido do saber visado.

Um dos objetivos nesses últimos anos é investigar a formação de professores, mais especificamente, de professores de Matemática, bem como as questões metodológicas. Neste sentido, são temas de investigação: Formação de professores, mais especificamente de professores de matemática: demandas institucionais e das Universidades; Processos de ensino e de aprendizagem de Alunos com Necessidades Educacionais Especiais e formação de professores envolvidos nesses processos; Engenharia didática de formação voltada para a formação de professores; Engenharia Didática de Segunda Geração, Engenharia Didática dos Domínios de Experiência, Engenharia dos Percursos de Estudo e Pesquisa (PER) etc.

A teoria das situações didáticas (TSD) DE GUY BROUSSEAU

Neste tópico apresentamos as ideias principais da Teoria das Situações Didáticas apresentadas no artigo de Brousseau (1997).

Brousseau (1997) buscou sintetizar toda sua teoria, trazendo detalhes e exemplos para enriquecer o trabalho de mais de trinta anos realizado com a participação de outros colegas e que, segundo ele, contribuíram para o desenvolvimento da ciência da didática. Ao fazer uma chamada para o foco principal de sua teoria, o autor coloca que, quando uma pessoa tem a intenção de ensinar um determinado conhecimento ou controlar sua aquisição, frequentemente faz uso dos "meios", isto é, pela implantação de um dispositivo que ele chama de *milieu*. O funcionamento real deste dispositivo pode produzir um efeito de formação, e o autor levanta questões que ajudaram a compreender as relações entre o *milieu* e o ensino de matemática.

De acordo com o autor, a aprendizagem se realiza por uma adaptação "espontânea" do aluno ao *milieu* criado por uma situação, na qual houve ou não uma intervenção de um ensinamento no decorrer do processo.

Para Brousseau os conhecimentos se manifestam, essencialmente, como instrumentos de controle de situações. Mas, adverte que se deve ter cuidado com a modelagem. Os modelos apresentam variantes e variáveis e os valores destas variáveis podem determinar as condições ótimas de difusão de conhecimentos determinados, ou explicar aqueles que aparecem como resposta (teoricamente) ótima às condições propostas aos alunos. A segunda ideia é de que, pelos modelos estímulo-resposta, as percepções, os autômatos ou os modelos estocásticos diversos, parecem poder modelar também as situações da mesma maneira e, particularmente, o *milieu* antagônico do sujeito.

O autor apresenta a tipologia de situações para uso didático, questionando se existe uma correspondência entre a organização do *milieu*, e as formas de interação adequada a seu controle e os repertórios de conhecimentos mobilizados.

Sabendo que as situações são mais numerosas e complexas que os conhecimentos e os saberes, e que os saberes a ensinar parece sempre mais excessivos do que o tempo do qual dispomos para ensiná-los, o autor alerta para o fato de que é preciso reduzir suficientemente o campo das situações em torno de alguns processos ou situações que ele denomina de "fundamentais". Uma ordem razoável para a construção dos saberes, segundo Brousseau, é *a ação*, seguida da *formulação*, *validação* e a *institucionalização*. Vale lembra que essas dialéticas podem se dar ao mesmo tempo, o que torna a expressão "ordem" esquemática, para fins didáticos. Contudo, a situação fundamental agrega outras formas de aprendizagens, pois permite utilizar todas e conjugá-las, isto é, ela completa as aprendizagens parciais que permanecem úteis, necessárias e, sobretudo, lhes dá significados.

Todavia, Brousseau chama a atenção para o fato de que as variantes de uma situação relativa a um mesmo saber matemático podem apresentar grandes diferenças de complexidade e, por isso, é fundamental conhecer a forma destas variantes, tanto para escolher e organizar os currículos quanto para determinar as situações mais favoráveis.

Considerando o ensino como um projeto e uma ação social de fazer apropriar um saber constituído ou em constituição, a Didática da Matemática torna-se a ciência de condições de difusão e de apropriação dos conhecimentos matemáticos úteis ao homem e às suas instituições. O termo "situação didática" passa a ser utilizado não mais no sentido de meio, mas como o ambiente do aluno, englobando tudo o que contribui especificamente para a componente matemática de sua formação. O autor enfatiza que uma interação se torna didática se, e somente se, um dos sistemas mostra a intenção de modificar o outro em termos de sistema de conhecimentos. Muitos trabalhos baseados no modelo triangular (saber – professor – aluno) que levam em conta as relações do sistema professor com o sistema aluno reduzem o ambiente de aprendizagem à ação do professor e ocultam completamente os produtos do sujeito com todo o *milieu* adidático. A intervenção que o professor evoca para os conhecimentos que ele ensina possibilita o funcionamento de outras circunstâncias, outro *milieu* onde o aluno torna-se autônomo (saber – professor – aluno – *milieu*).

Brousseau afirma que os contratos didáticos que hoje se apresentam como contratos de educação, no século dezenove representavam contratos de instrução. Num contrato didático, a instituição que ensina toma a responsabilidade efetiva de sua ação sobre o aluno e este, por sua vez, não pode saber o que é específico de cada saber antes de tê-lo aprendido. A modificação intencional do receptor - aluno - se dá por intermédio de uma ação e não por meio de simples comunicação ou argumentação.

O autor apresenta a devolução - relacionada à motivação do aluno, envolvendo componentes psicológicas, psicoafetivas e pedagógicas - e a institucionalização como componentes essenciais das situações didáticas. Afirma que é possível modelar as condições de funcionamento da produção e da gênese do conhecimento por meio de jogos.

Em relação à institucionalização, o autor afirma que a escolha das condições de ensino se justifica pela necessidade de dar um sentido aos conhecimentos, sendo ideal que o próprio aluno dê sentido aos conhecimentos que ele manipula, articulando suas componentes. Cabe ao professor institucionalizar, isto é, reconhecer o valor de um saber que se tornará um meio de referência.

No que tange a aquisição de um saber novo, o autor afirma que os critérios de dependência entre as aquisições de saberes ainda são vagos e que a transformação de aplicações, por parte do professor, em exercícios de avaliação (avaliação do saber adquirido, avaliação do ensino, avaliação do aluno, etc.), ou em exercícios de aprendizagem apresenta ainda muitos problemas.

As estratégias fortemente didáticas, tomadas sobre um saber novo, são definidas pela responsabilidade de alguns elementos da situação didática e por hipóteses epistemológicas que estão associadas aos contratos, quais sejam: o contrato de imitação ou de reprodução formal, o contrato de ostensão, o contrato de condicionamento, a maiêutica socrática, os contratos de aprendizagens empiristas e, finalmente, os contratos construtivistas, sendo todos detalhadamente explicados e exemplificados. O autor afirma que a teoria das situações mostra o caráter insuficiente de cada um desses contratos para construir, de cada vez, um saber canônico, os conhecimentos que o acompanham e práticas que caracterizam a implementação, durante gêneses frequentemente longas.

De acordo Brousseau, embora leve em conta um número pequeno de sistemas e parâmetros, a Teoria das Situações Didáticas tem ajudado a evidenciar e a prever, em muitos casos, os efeitos, em longo prazo, de reformas educativas amplas e potentes – reformas, estas, que já se sucedem há 40 anos e que tinham por objetivo oficial *melhorar a educação*. Ao avaliar seus estudos, desenvolvidos ao longo de tantos anos, o autor afirma ter percebido no público o sentimento de que a condição ideal para a educação seria um tutor se ocupando com um único aluno. Esta ideia – ainda que um tanto utópica - combinada com as contribuições da psicologia, leva a crer que cada aluno pensaria e aprenderia de forma diferente, o que exigiria uma pedagogia diferenciada e classes homogêneas. Isto nos remete a um modelo falso que, se considerado ao extremo, levaria a decisões absurdas, pois os conhecimentos são um bem cultural comum, que os alunos não podem aprender a praticar senão juntos. Para Brousseau, a solução está num equilíbrio.

A teoria antropológica do didático (TAD) DE YVES CHEVALLARD

Apresentamos brevemente a Teoria Antropológica do Didático, desenvolvida por Chevallard (1992), focando mais especificamente suas noções fundamentais e como pode ser um instrumento poderoso para análise, por exemplo, de práticas docentes. Discutiremos o modelo proposto, as noções de organizações praxeológicas (organizações matemática e didática), entre outros.

A Teoria Antropológica do Didático (TAD) estuda as condições de possibilidade e funcionamento de Sistemas Didáticos, entendidos como relações sujeito-instituição-saber (em referência ao sistema didático tratado por Brousseau, aluno-professor-saber).

A Teoria Antropologia do Didático, segundo Chevallard, estuda o homem frente ao saber matemático, e mais especificamente, frente a situações matemáticas. Uma razão para a utilização do termo "antropológico" é que a TAD situa a atividade matemática e, em consequência, o estudo da matemática dentro do conjunto de atividades humanas e de instituições sociais (CHEVALLARD, p.1, 1999).

A Didática da Matemática, vista no campo da antropologia do conhecimento (ou antropologia cognitiva), considera que tudo é objeto identificando diferentes tipos de objetos particulares: as instituições, os indivíduos e as posições que os indivíduos ocupam nas instituições, tomando os indivíduos como sujeitos das instituições.

O conhecimento - e o saber, considerado como certa forma de organização de conhecimentos – o autor entende que um objeto existe se um sujeito ou uma instituição o reconhece, se há um conhecimento e um saber reconhecido como forma de organização desse conhecimento. Em outras palavras, a existência de um objeto depende do reconhecimento e do relacionamento de pelo menos uma pessoa ou instituição com esse objeto.

Para Chevallard (1999), o saber matemático organiza uma forma particular de conhecimento, produto da ação humana em uma instituição caracterizada por qualquer coisa que se produza, se utiliza e se ensina, além de poder eventualmente transpor as instituições. Assim, o autor introduz a noção de habitat de um objeto matemático como sendo o tipo de instituição onde se encontra o saber relacionado ao objeto de estudo, que por sua vez determinará a função desse saber, ou seja, determinará seu nicho.

Na TAD, as noções de (tipos de) tarefa, (tipo de) técnica, tecnologia e teoria permitem modelar práticas sociais em geral e, em particular, a atividade matemática. De acordo com o autor, toda prática institucional pode ser analisada, sob diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras, em um sistema de tarefas relativamente bem delineadas. Além disso, o cumprimento de toda tarefa decorre do desenvolvimento de uma técnica, a palavra técnica é aqui utilizada como uma "maneira de fazer" uma tarefa, mas não é necessariamente como um procedimento estruturado e metódico ou algorítmico.

O problema de delimitar tarefas em uma prática institucional varia de acordo com o ponto de vista da instituição onde se desenvolve a prática ou de uma instituição externa que observa a atividade para descrevê-la com um objetivo preciso. As tarefas são identificadas por um verbo de ação, que sozinho caracterizaria um gênero de tarefa, por exemplo: calcular, decompor, resolver, somar que não definem o conteúdo em estudo. Por outro lado, "resolver uma equação fracionária" ou ainda "decompor uma fração racional em elementos simples" caracterizam tipos de tarefas, em que se encontram determinadas tarefas, como por exemplo, "resolver a equação" ou "decompor a fração 7/9 em frações mais simples".

Para Chevallard a necessidade de reconstrução de tarefas, enquanto construções institucionais caracteriza um problema a ser resolvido dentro da própria instituição, que no caso da sala de aula, por exemplo, é uma questão didática.

Para uma determinada tarefa, geralmente, existe uma técnica ou um número limitado de técnicas reconhecidas na instituição que problematizou essa tarefa, embora possam existir técnicas alternativas em outras instituições. A maioria das tarefas institucionais torna-se rotineira quando deixa de apresentar problemas em sua realização. Isso quer dizer que para produzir técnicas é preciso que se tenha uma tarefa efetivamente problemática que estimule o desenvolvimento de pelo menos uma técnica para responder às questões colocadas pela tarefa. As técnicas assim produzidas são então organizadas para que funcionem regularmente na instituição. Obtém-se assim um bloco "prático-técnico" formado por um tipo de tarefas e por uma técnica que pode ser identificado em linguagem corrente como um "saber-fazer". (CHEVALLARD, 2002, p. 3)

Em relação à ecologia das tarefas, Bosch e Chevallard (1999, p. 85-86) afirmam que "a ecologia das tarefas e técnicas são as condições e necessidades que permitem a produção e utilização destas nas instituições [...]". Supõe-se que, para existir em uma instituição, uma técnica deve ser pelo menos compreensível, legível e justificada. Essas condições e restrições ecológicas implicam então a existência de um discurso descritivo e justificativo das tarefas e técnicas, chamado de tecnologia da técnica. Toda tecnologia precisa também de uma justificação, ou seja, a teoria da técnica.

Para Chevallard (2002) um "saber-fazer", identificado por uma tarefa e uma técnica, não é uma entidade isolada porque toda técnica exige, em princípio, uma justificativa, isto é, um "discurso lógico" (logos) que lhe dá suporte, chamado de tecnologia. Segundo o autor, a tecnologia vem descrever e justificar a técnica como uma maneira de cumprir corretamente uma tarefa.

Um conjunto de técnicas, de tecnologias e de teorias organizadas para um tipo de tarefa forma uma organização "praxeológica" (ou praxeologia) pontual. Ela reporta-se ao fato de que uma prática humana, no interior de uma instituição, está sempre acompanhada de um discurso, mais ou menos desenvolvido, de um logos que a justifica, acompanha e que lhe dá razão.

Um saber diz respeito a uma organização praxeológica particular que lhe permite funcionar como uma máquina de produção de conhecimento. A praxeologia associada a um saber é a junção de dois blocos: saber-fazer (técnico/prático) e saber (tecnológico/teórico) cuja ecologia refere-se às condições de sua construção e vida nas instituições de ensino que a produz, utiliza ou transpõe. Consideram-se aqui as condições de "sobrevivência" de um saber e de um saber-fazer em analogia a um estudo ecológico: qual o habitat? Qual o nicho? Qual o papel deste saber ou saber-fazer na "cadeia alimentar"? Tais respostas ajudam na compreensão da organização matemática determinada por uma praxeologia.

Segundo Chevallard (1999), as praxeologias (ou organizações) associadas a um saber matemático são de duas espécies: matemáticas e didáticas. As organizações matemáticas referem-se à realidade matemática que se pode construir para ser desenvolvida em uma sala de aula e as organizações didáticas referem-se à maneira que se faz essa construção; sendo assim, existe uma relação entre os dois tipos de organização que Chevallard (2002) define como fenômeno de co-determinação entre as organizações matemática e didática.

Em um processo de formação de saberes/conhecimentos, as praxeologias envelhecem, pois, seus componentes teóricos e tecnológicos perdem seu crédito. Constantemente, em uma determinada instituição I surgem novas praxeologias que poderão ser produzidas ou reproduzidas se existem em alguma instituição I'. A passagem da praxeologia da instituição I para a da instituição I' é chamada por Chevallard (2002) de Transposição, mais especificamente, de Transposição Didática quando a instituição de destino é uma instituição de ensino (escola, classe, etc.).

A natureza dual das concepções matemáticas segundo Anna Sfard[10]

O artigo de Anna Sfard apresenta um modelo teórico de investigação do papel dos algoritmos no pensamento matemático. No estudo, uma perspectiva ontológica e psicológica combinada é aplicada. Uma análise, das diferentes definições matemáticas e representações, leva à conclusão de que noções abstratas como o número ou função, podem ser concebidas de duas maneiras fundamentalmente diferentes: estruturalmente, como objetos, e operacionalmente, como processos. Faz também, uma análise aprofundada das etapas de formação de conceito, concluindo que a transição de operações computacionais para objetos abstratos é um processo longo e inerentemente difícil, realizado em três etapas: interiorização, condensação e reificação.

Sfard (1991, p.2) argumenta sobre a inacessibilidade matemática que parece superar as dificuldades encontradas em outras áreas de conhecimento, que deve haver algo realmente especial e único no tipo de pensamento envolvido na construção do conhecimento matemático. Isso remete ao senso comum, em dizer que a matemática é a mais abstrata das ciências, o que não ajuda muito, quando o que deveríamos estar preocupados é saber: "Como a abstração matemática difere dos outros tipos de abstrações em sua natureza, na forma de se desenvolver e nas suas funções e aplicações?" Com isso, a autora analisa a origem das dificuldades e investigar o caráter epistemológico associado à natureza do conhecimento matemático. Ela afirma que as concepções da matemática têm caráter e distingue **conceito** e **concepção**. De acordo com esta autora o conceito é "[...] uma construção teórica dentro do universo formal do conhecimento ideal" e apresenta concepção como: "o conjunto das representações e associações internas relembradas pelo conceito" (p. 3). Ela classifica a noção de concepção em **concepção estrutural** e **concepção operacional**.

A **concepção estrutural** remete a construções estáticas, integradoras, concebidas com base em objetos abstratos, que são construídas por sua vez com o auxílio de outros objetos também abstratos, o "pensamento estrutural cria uma fisionomia para o conceito" (p. 4). Já a **concepção operacional** remete a construções dinâmicas, sequenciais e detalhadas, concebidas como um processo computacional, "implica olhá-la mais como um potencial do que como um conceito, o qual vem de uma sequência de ações" (p. 4).

Sfard afirma que as concepções estruturais e operacionais não são exclusivas, mas sim complementares, e sendo assim considera que a noção matemática é dual, e que para se tenha um conhecimento profundo da matemática é indispensável ver o conceito matemático como um **processo** e como um **objeto**. Apresenta, então, alguns exemplos a fim de mostrar que qualquer conceito pode ser concebido por uma ou outra concepção, conforme quadro 4.

A autora apresenta a **perspectiva histórica** e a **perspectiva psicológica** do papel das concepções estruturais e operacionais na formação de conceitos matemáticos.

A autora aponta o caso de funções e conjuntos, no qual, segundo ela, somos forçados a ignorar sua construção, considerando somente a forma estrutural, devido ao seu estágio aparentemente mais avançado no desenvolvimento do conceito. Em outras palavras, temos

---

[10] SFARD, A. **On the dual nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Process and Objects as Different Sides of The Same Coin**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers. Educational Studies in Mathematics 22, pp. 1-36, 1991.

boas razões para pensar que no processo de formação dos conceitos, a concepção operacional precede a estrutural. Segundo Sfard (1991, p. 11, Tradução nossa), "Um olhar cuidadoso na história dos conceitos de números ou funções mostra que eles foram concebidos operacionalmente muito antes que suas definições e representações estruturais fossem inventadas".

Quadro 4 – Descrição estrutural e operacional de noções matemáticas

	Estrutural	Operacional
Função	Conjunto de pares ordenados (BOURBAKI, 1934)	Processo de cálculo ou método bem definido de obter um sistema de outro
Simetria	Propriedade de uma forma geométrica	Transformação de uma forma geométrica
Número natural	Propriedade de um conjunto ou a classe de todos os conjuntos com mesma cardinalidade finita	Zero ou qualquer número obtido de outro natural somado 1 (o resultado de contagem)
Número racional	Par de inteiros (um membro de um conjunto de pares definido especificamente)	O resultado de divisão de inteiros
Circunferência	Lugar de todos os pontos equidistantes de um ponto dado	Uma curva obtida de rotação de um compasso em torno de um ponto fixo

Fonte: Sfard (1991, p.11)

De acordo com Sfard a formação de uma concepção estrutural é um processo lento e muitas vezes difícil. Desta forma, a dificuldade deve ser analisada do ponto de vista psicológico.

> Em primeiro lugar, as declarações acima implicam que há algum curso "natural" de eventos nos processos, o que dificilmente pode ser considerado espontâneo. Com efeito, a aprendizagem matemática, especialmente em níveis mais avançados, não acontece sem que haja uma intervenção externa (de um professor, de um livro de texto), e podem, portanto, ser altamente dependente de um tipo de estímulo (do método de ensino) para acontecer. (SFARD, 1991, pp.16-17, tradução nossa).

Na perspectiva psicológica, a afirmação "operacional antes do estrutural" deve ser entendida meramente como uma receita para o ensino, que segundo Sfard, embora tal interpretação não deva ser descartada, ela pouco faria justiça ao modelo sugerido. A autora afirma que sua argumentação está baseada no fato de no processo de aprendizagem, certas características constantes podem ser identificadas.

A partir desta discussão, a autora afirma que existem três fases distintas na formação do conceito: interiorização, condensação e reificação.

Na fase de interiorização o aluno se familiariza com processos que podem dar origem a um novo conceito. Os processos que são executados, nesta fase, são de um grau de dificuldade inferior, essa situação pode favorecer condições para que o novo conceito possa ser organizado, e consequentemente, o aluno pode torna-se hábil em realizar estes processos. O termo "interiorização" é usado no mesmo sentido dado por Piaget (1970, p.14): um processo foi interiorizado quando o sujeito é capaz de "manipular" representações (mentais), e para ser considerado, analisado e comparado não precisa mais ser realmente efetuado.

Na fase de **condensação** o aluno começa a pensar sobre o processo como um todo, sem se prender em detalhes. É nessa fase que o aluno pode elaborar generalizações, comparações e combinações com outros processos.

Somente quando uma pessoa se torna capaz de conceber a noção como um objeto de pleno direito, Sfard fala que o conceito foi reificado. **Reificação**, portanto, é definida como uma mudança ontológica - a capacidade súbita de ver algo familiar em uma luz totalmente nova. Assim, enquanto interiorização e condensação são graduais, a reificação é um salto quântico instantâneo: um processo de solidificar o objeto, em uma estrutura estática. O estágio de reificação é o ponto em que uma interiorização de conceitos de nível mais alto começa.

Ao finalizar o texto a autora afirma que a reificação, que traz o entendimento relacional, é difícil de conseguir, pois exige muito esforço, e pode vir quando menos se espera às vezes num súbito lampejo. (SFARD, 1992, p. 33)

Aplicação do Modelo SOLO[11]

Pegg e Tall (2010) fazem um contraste entre o cenário global do desenvolvimento das teorias de Piaget, van Hiele e Bruner com o modelo SOLO (Structure of Observed Learning Outcome[12]) de Kevin Collis e John Biggs.

Para Hegedus (2010) (que escreveu o prefácio do livro) uma característica importante do modelo SOLO é compreender como os estágios de desenvolvimento intelectual de uma criança são "alinhados", em que um estágio não substitui o outro e sim faz com que a criança tenha uma evolução no modo de pensar. Uma segunda característica é o foco nas respostas dos alunos ao invés de focar no estágio de desenvolvimento no qual estão situados. O modelo SOLO oferece uma teoria mais social para interpretar as estruturas de respostas de vários indivíduos em uma variedade de ambientes de aprendizagem.

O foco do trabalho de Pegg e Tall é considerar várias teorias que tratam de questões locais e globais acerca do desenvolvimento cognitivo a fim de elevar o debate além de uma simples comparação, ou seja, de modo a avançar no sentido de identificar temas subjacentes mais profundos que permitirão oferecer insights sobre questões relativas à aprendizagem de matemática.

Os autores afirmam que para auxiliar nessa tarefa, eles distinguiram dois tipos de teorias de desenvolvimento cognitivo: uma global e outra local. Para exemplificar o tipo de desenvolvimento que tais perspectivas globais implicam, eles apresentam um quadro (5) que associa significado aos cinco níveis do modelo SOLO de Biggs e Collis (1982).

---

[11] PEGG, J.; TALL, D. The Fundamental Cycle of Concept Construction Underlying Various Theoretical Frameworks. In: SRIRAMAN, B.; ENGLISH, L. **Theories of Mathematics Education Advances in Mathematics Education**. SPRINGER, 2010, pp.173-192.

[12] Estrutura do resultado observado na aprendizagem

Quadro 5 – Descrição dos níveis do modelo SOLO

Sensório motor (logo após o nascimento)	A pessoa reage a ambientes físicos. Para as crianças é quando as habilidades motoras são adquiridas. Estas desempenham um papel importante mais tarde, como as habilidades associadas aos esportes.
Icônica (após os 2 anos)	A pessoa internaliza ações sob a forma de imagens. As crianças desenvolvem palavras e imagens que representam objetos e eventos. Para o adulto este nível de funcionamento auxilia na apreciação da arte e da música e leva a uma forma de conhecimento intuitivo.
Simbólico concreto (dos 6 aos 7 anos)	A pessoa pensa usando um sistema de símbolos como a linguagem escrita e o sistema de numeração. Este é o nível frequentemente designado à aprendizagem na escola primária e secundária.
Formal (dos 15 aos 16 anos)	A pessoa considera conceitos mais abstratos. Pode ser descrito como o trabalho em termos de "princípios" e "teorias". Os alunos não estão mais restritos a um referencial concreto. Na sua forma mais avançada envolve o desenvolvimento das disciplinas.
Pós-formal (em torno de 22 anos)	A pessoa é capaz de questionar ou desafiar a estrutura fundamental das teorias ou disciplinas.

Fonte: Pegg e Tall (2010, p.175)

Os quadros locais sugeridos pelo modelo SOLO compreendem um ciclo recorrente de três níveis. Nesta interpretação, o primeiro nível do ciclo é conhecido como nível de resposta uni-estrutural (U) e concentra-se no problema ou domínio, mas utiliza apenas uma parte dos dados relevantes. O nível multi-estrutural (M) é o segundo nível de resposta e se concentra em duas ou mais partes dos dados nos quais estes dados são usados sem quaisquer relações percebidas entre eles; não há integração entre as diferentes partes de informação. O terceiro nível de resposta, o relacional (R), concentra-se em todos os dados disponíveis, com cada parte tecida em um mosaico global de relações de modo a satisfazer uma estrutura coerente.

Na descrição original da Taxonomia SOLO, Biggs e Collis (1982) observaram que o ciclo UMR[13] pode ser operado em diferentes níveis. Por exemplo, eles comparam o ciclo com o quadro global da teoria dos estágios Piagetianos e sugerem que

> os níveis pré-estrutural, uni-estrutural, multi-estrutural, relacional, abstrato ampliado são isomórficos, mas logicamente distintos dos estágios sensório-motor, pré-operacional, concreto precoce, concreto médio,

[13] Os três níveis, *uni-estrutural*, *multi-estrutural* e *relacional*, quando considerados conjuntamente, são chamados de ciclo UMR de aprendizagem.

generalização do concreto e operacional formal, respectivamente. (ibidem, p. 31 apud PEGG e TALL, 2010, p. 177, tradução nossa).

Pegg e Tall afirmam que o modelo SOLO evoluiu como uma reação às inadequações observadas na estrutura de Piaget, na qual a criança é observada operando em diferentes níveis, em diferentes tarefas supostamente no mesmo nível. Eles partem então para a discussão referente às teorias que trazem em seu bojo o conceito de encapsulamento processo-objeto, como: *ação*, *processo*, *objeto* de Dubinsky (1991); *interiorização*, *condensação*, *reificação* de Sfard (1991), e *procedimento*, *processo*, *procepto* de Gray e Tall (1991, 1994). Os autores afirmam que o encapsulamento processo-objeto é fundamentado essencialmente na noção de *abstração reflexiva* de Piaget, na qual as ações sobre objetos existentes ou conhecidos tornam-se interiorizadas como processos e são encapsuladas como objetos mentais do pensamento.

Pegg e Tall apresentam o quadro 6 que mostra essas três abordagens teóricas ao lado da sequência UMR do modelo SOLO. Eles afirmam que em cada abordagem é possível aplicar a análise SOLO para o ciclo como um todo. A ação inicial ou procedimento está no nível uni-estrutural de operação, no qual cada procedimento é usado para um problema específico. O nível multi-estrutural pode sugerir a possibilidade de procedimentos alternativos sem que eles sejam considerados interligados, e, portanto, permanecem no nível de ação na teoria APÓS; o nível relacional pode sugerir que diferentes procedimentos com o mesmo efeito são agora vistos como essenciais para um mesmo processo. Isso conduz à encapsulação do processo como objeto (um novo nível uni-estrutural) e a sua utilização como uma entidade num esquema mais amplo de conhecimento.

Quadro 6 – Ciclos locais de desenvolvimento cognitivo

Modelo SOLO	Davis	APOS de Dubinsky	Gray e Tall
			(Objetos básicos)
Uni-estrutural Multi-estrutural	Procedimento (VMS[14])	Ação	Procedimentos
Relacional	Processos integrados	Processo	Processo
Uni-estrutural (novo ciclo)	Entidade	Objeto Esquema	Proceito

Fonte: Pegg e Tall (2010, p.182)

Pegg e Tall discutem sobre os modos distintos de construção cognitiva, os quais estão disponíveis aos indivíduos quando passam para um conhecimento mais sofisticado, como

14 VMS – sequências visualmente moderadas, cada passo promove o outro, até que a familiaridade permite que seja concebido um processo, ou uma entidade mental.

por exemplo, eles operam no modo concreto-simbólico, mas também conhecem as estruturas disponíveis em níveis anteriores, tais como o sensório-motor ou icônico.

Os autores apresentam a teoria dos três mundos da matemática, na qual Tall introduz a noção de "proceito" (processo e conceito), e afirmam que enquanto o modelo SOLO olha para o processo da informação em sucessíveis níveis de desenvolvimento e análise, observando a estrutura das respostas, os três mundos da matemática oferecem um quadro para o desenvolvimento cognitivo da ação e percepção da criança por intermédio de várias construções mentais corporificadas e simbólicas até os níveis mais elevados da matemática axiomática formal.

No próximo tópico, retomamos os diferentes aspectos das Teorias da Educação Matemática, apontando sua diversidade, semelhanças e diferenças.

Considerações e reflexões

Este estudo, apesar de não exaustivo, permite obter uma visão abrangente das diversas teorias existentes, relacionadas ao ensino e à aprendizagem de matemática. A diversidade de teorias e as especificidades de cada uma delas vêm confirmar a ideia de que uma única teoria, ou um único modelo, dificilmente dá conta de explicar e explicar todos os fenômenos envolvidos nos processos de ensino e de aprendizagem de matemática.

O pesquisador deve procurar conhecer bem as ideias principais das diversas teorias, de modo a poder identificar quais delas poderá usar para referenciar teoricamente sua pesquisa.

Reflexões – Síntese Educação Matemática: um campo de conhecimento

Sobre todos os elementos apresentados neste tópico, percebemos a importância de conhecermos as teorias que estão sendo desenvolvidas, em que elas se fundamentam e principalmente como fazer um bom uso da teoria. Foi possível também com a leitura dos textos mostrar que a EDM é uma área de conhecimento, ainda em formação, e que a busca pela identidade desta área é uma constante entre pesquisadores de diversas partes do mundo.

De acordo com English e Sriraman (2010) a falta de foco, de perspectivas teóricas divergentes e uma crise de identidade ainda têm provocado muitas críticas no campo de investigação em Educação Matemática. Mesmo com avanços significativos, é preciso repensar as múltiplas teorias, as divergências entre os matemáticos e os caminhos para o futuro, principalmente na necessidade de considerar a importância da construção de uma teoria para a área. Segundo os autores, a concepção e a preferência por uma teoria influenciam tanto na escolha da questão de pesquisa quanto no quadro teórico da pesquisa. Por isso, é preciso verificar qual é o papel da teoria na formulação de problemas, na concepção e métodos empregados, e na interpretação dos resultados de pesquisa na área.

O mau uso das teorias pelos pesquisadores e como pensar sobre os objetivos da pesquisa que poderiam ajudar a eliminar esse emprego indevido e mal-entendido são questões que Lester (2010) procura responder. Para este autor, o mau uso tem a ver com a incompreensão generalizada do que significa adotar uma postura teórica para pesquisa, enquanto que a segunda ocorre quando alguns pesquisadores, apesar de reconhecerem a importância da teoria, não se sentem qualificados para se engajar no trabalho teórico. Ele atribui esses dois problemas ao fracasso dos programas de pós-graduação que são necessários para aprofundar as teorias para os iniciantes, e ao fracasso das revistas de pesquisa que devem insistir com os autores para submeter textos sérios que tratam de suas descobertas.

Kilpatrick (2010) afirma que é necessária uma melhor harmonização da investigação com a prática tornando essa a busca de uma "grande teoria para a educação matemática." Ele vê o desenvolvimento de uma teoria como simplesmente inatingível, mas desejável para a organização do campo, enquanto Sriraman e English (2010) afirmam que a criação de uma grande teoria seria difícil, se não impossível devido à natureza complexidade dos fenômenos investigados na área de Educação Matemática.

Schoenfeld (apud Kilpatrick, 2010) lista oito critérios que modelos e teorias no ensino de matemática devem satisfazer. São eles: poder descritivo, poder explicativo, escopo, poder preditivo, rigor e especificidade, falseabilidade, replicabilidade, múltiplas fontes de evidências ("triangulação"). Para este autor, uma teoria precisa cobrir mais território, tratar de um corpo de fenômenos, e satisfazer todos os critérios mais plenamente; elas devem passar por diversos testes, pois elas exigem verificação por intermédio de situações e circunstâncias.

Reflexões sobre a teoria APOS e os pensamentos matemáticos elementar e avançado segundo David Tall[15]

Ao se discutir os processos envolvidos nas construções de conhecimentos matemáticos têm-se o pensamento matemático elementar e o pensamento matemático avançado. Embora muitos processos de pensamento matemático avançado já estejam presentes no processo de pensamento matemático elementar, pode-se distingui-los quanto à capacidade do sujeito em apresentar definições e deduções formais.

Segundo Asiala et al. (1996), foi no seio do pensamento matemático avançado que se desenvolveu a Teoria APOS, que se constituiu da necessidade encontrada pelos pesquisadores do grupo de pesquisa Research in Undergraduate Mathematics Education Community – RUMEC –, em "[...] considerar os processos mentais pelos quais novos conceitos abstratos são adquiridos" (DUBINSKY; LEWIN, 1986, p. 55), pois o grupo considera que a construção mental de uma noção matemática começa na manipulação de objetos físicos ou mentais em forma de ações. As ações são, então, interiorizadas em processos que são encapsulados em objetos matemáticos. Os objetos podem ser desencapsulados nos processos com base, nos quais, foram formados e, finalmente, as ações, os processos e os objetos podem ser organizados ou reorganizados em esquemas.

O objetivo de Tall (1999) neste artigo foi responder ao fórum de pesquisa coordenado por Ed Dubinsky sobre a teoria APOS como "uma perspectiva teórica na pesquisa em educação matemática", e mais do que isso, oferecer uma maior contribuição para a EDM em nível de graduação.

[15] TALL, D. Reflections on APOS theory in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. PME 23, Haifa, Israel, julho, 1999. Disponível em: < http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/ dot1999c-apos-in-amt-pme.pdf> Acesso em: 26 junho 2012.

Tall analisa a teoria APOS dentro de esferas mais amplas de aprendizagem e de pensamento matemático, particularmente a comparação de seu papel em vários contextos de pensamento matemático elementar (EMT) e sua extensão para o pensamento matemático avançado (AMT). Ele afirma que a teoria APOS possui uma estrutura subjacente biológica em que um estímulo externo a um grupo neuronal, suficientemente forte, dispara um segundo grupo neuronal, mas não um terceiro. O disparo faz com que o elo entre o primeiro e o segundo se torne mais sensível por um período de horas ou dias (de modo que somos mais propensos a lembrar de acontecimentos recentes). Se a conexão for reativada, ele se torna mais facilmente acionado até que ele atinja o estágio em que qualquer excitação do primeiro também dispara o segundo. Este longo prazo de potenciação das conexões neuronais constrói novas estruturas.

Para o autor, a força combinada do primeiro e do segundo grupo podem agora fazer com que um terceiro grupo passe a ser excitado, e assim por diante. Desta maneira um estímulo externo pode causar uma queima entre dois estados percebidos inicialmente como separados, em seguida, então se unem em conjunto, uma parte dos mais complexos agrupamentos neuronais podem ser acionados em situações mais complexas. O amplo processo de ação-objeto-esquema, portanto, tem uma base biológica natural.

A teoria APOS começa com ações que conduzem a processos de encapsulamento de objetos. Isso, segundo Tall, sugere uma primazia da ação sobre o objeto, e tal primazia precisa ser questionada. Assim o autor afirma que

> Dubinsky e seus colaboradores fizeram um esforço impressionante para formular tudo em linguagem de ação-processo-objeto. No entanto, o desejo de colocar essa sequência à tona leva a uma descrição que, para mim, logo se torna excessivamente normativa. (TALL, 1999, p. 3, tradução nossa).

Tall, referindo-se a Piaget e Garcia (1983), descreve o objeto inicial como "um processo encapsulado" ou um "objeto tematizado" para manter a primazia da sequência APOS:

- Intra: foco em um único objeto;
- Inter: estudo das transformações entre objetos;
- Trans: desenvolvimento de esquemas conectando as ações, processos e objetos.

Segundo Dubinsky et al. (1988 apud Tall, 1999, p.3), a teoria APOS também formula a noção de “objeto permanente” “como resultante de um processo de encapsular e realizar transformações no espaço que não destroem o objeto físico”.

Para explicitar a relevância da APOS na matemática, Tall começa com a EMT. Ele assinala aqui os três modos de abstração de Piaget: abstração empírica dos objetos do ambiente, abstração pseudo-empírica de ações sobre os objetos no ambiente e a abstração reflexiva a partir dos objetos mentais.

Tall conclui que APOS rigorosas podem ser utilizadas para formular a ideia de que os conceitos cognitivos devem ser precedidos por operações cognitivas. Nesse sentido, a teoria é um “ToE” (*Theory Of Everything*). No entanto, dado que o aluno tem uma gama de construções incorporadas que necessitam de reflexão e de reconstrução, Tall acredita que a ênfase em sequências exclusivamente construídas em ação-processo-objeto-esquema distorce o mais amplo empreendimento. Ele afirma que a Teoria APOS tem muitas aplicações na matemática elementar da aritmética, álgebra e cálculo, mas é de menor relevância no estudo do espaço e forma. Finaliza o artigo dizendo que a APOS é uma contribuição importante para a compreensão da cognição matemática, mas como uma ferramenta e não como um modelo global.

Reflexões sobre as teorias da Educação Matemática

A teoria APOS (DUBINSKY, 1991) e a teoria da reificação (SFARD, 1991) podem ser encaixadas num grupo chamado teorias de processo-objeto. Estas duas teorias conjecturam que o aprendizado se dá por meio da *encapsulação* ou *reificação* (respectivamente) de um processo em um objeto. Quando o indivíduo é capaz de analisar um processo, refletir sobre ele e sobre o uso que se faz dele, conectando-o a diferentes processos, dizemos que o indivíduo encapsulou ou reificou este processo.

Vimos que de acordo com a teoria APOS, existem três tipos de conhecimento matemático: *ações*, *processos e objetos*, que por sua vez, são organizados em *esquemas*. Já a teoria da reificação trata de dois tipos de conhecimento matemático, as *concepções estruturais* e as *concepções operacionais*. E, ainda que a transição de uma para outra tenha três fases: *interiorização*, *condensação* e *reificação*.

A teoria APOS formula a noção de "objeto permanente", em que um objeto mental é criado por uma ação física ou percepção de um objeto externo, mantendo, dessa forma, a primazia do processo (ação) sobre o objeto, mostrando claramente que ações cognitivas são necessárias para construir objetos cognitivos.

Para falar sobre a relevância da teoria APOS em matemática, Dubinsky aborda o pensamento matemático elementar, relembrando os três modos de abstração apontados por Piaget: a *abstração empírica*, a partir de objetos do ambiente; a *abstração pseudo-empírica*, de ações em objetos no ambiente e a *abstração reflexiva*, de objetos mentais. Defende que a geometria começa com uma teoria baseada em objetos, pois inclui muitos atos de abstração empírica com foco em objetos, mas que não despreza, de forma alguma, a existência de processos. Os conceitos, em geometria, são decorrentes de atividades que envolvem a interação física com o mundo real e dependem, também, da sofisticação da linguagem. O objeto é o foco da atenção e, só mais tarde, a linguagem utilizada para a descrição permite que a mente construa objetos platônicos, como linhas "sem largura", por exemplo.

Já em relação à aritmética e à álgebra, o crescimento do conhecimento começa com a abstração pseudo-empírica e, portanto, se aproxima mais da sequência APOS. Nomes dos números e símbolos numéricos desempenham um papel fundamental nesse desenvolvimento. Símbolos estão no centro do desenvolvimento cognitivo de aritmética e, mais tarde, em álgebra.

De um modo geral, Tall reconhece que a Teoria APOS tem muitas aplicações na matemática elementar, na aritmética, álgebra e cálculo, sendo de menor relevância no estudo do espaço e forma. Ele também questiona a "ordem lógica" da Teoria APOS (ações–processos–objetos–esquemas) como uma única possibilidade de interpretação, evidenciando a necessidade de se ampliar a aplicação desta Teoria no campo da Educação Matemática. Tall finaliza o artigo afirmando que a Teoria APOS pode contribuir para o entendimento da cognição matemática, mas como um instrumento valioso, e não como um modelo global.

Observando a análise feita por Pegg e Tall (2010) na qual eles utilizaram o modelo SOLO, pudemos perceber a influência das ideias de Piaget em cada uma das teorias apresentadas.

Reflexões sobre as duas teorias da didática da matemática

A TSD (BROUSSEAU, 1997) permite pensar sobre o processo de aprendizagem uma vez que está estruturada em *ação*, *formulação*, *validação* e *institucionalização*. Também fornece uma estrutura para a seleção de tarefas e o papel das tarefas no processo de ensino e aprendizagem, já que se apoia na estruturação do *milieu* e nas ideias da TAD (CHEVALLARD, 1992).

A Teoria Antropológica do Didático (TAD) desenvolvida por Yves Chevallard (1999) é uma contribuição importante para a Didática da Matemática, pois além de ser uma evolução do conceito de transposição didática, inserindo a didática no campo da antropologia, focaliza o estudo das **organizações praxeológicas didáticas** pensadas para o ensino e a aprendizagem de organizações matemáticas.

Apresentação no quadro 7, uma síntese das duas teorias. Mostramos neste quadro as convergências e as diferencias no trato dos processos de ensino e da aprendizagem da matemática.

Quadro 7: Comparativo entre os focos da TSD e TAD

Brousseau (TSD)	Chevallard (TAD)
Estuda a relação aluno-professor-saber através de situações didáticas e adidáticas que mediam a relação sujeito – saber.	Estuda a evolução e os diversos pontos de vista do saber, olhando a relação instituição-aluno-saber, o processo de ensino e aprendizagem no sistema escolar; a teorização é feita numa perspectiva mais geral para o estudo de uma obra matemática.
Seu objetivo é modelar situações de ensino e aprendizagem de Matemática adequadas para que a ação do aluno viabilize a construção do conhecimento.	Seu objetivo é mostrar como o saber se insere nas diversas instituições. Na instituição escolar, esta modelagem da atividade matemática é feita por meio das praxeologias. Não faz nenhuma hipótese sobre a aprendizagem e, propõe uma modelagem de todos os tipos de estudos, consequentemente, todos os tipos de ensino.
As etapas da fase adidática descrevem o processo de transformação do conhecimento em saber.	Coloca a relação do conhecimento como privada e do saber como pública, face ao objeto de ensino. Identifica momentos de estudo das praxeologias.

Fonte: Almouloud (2007, p. 199)

Para realizar a modelagem do saber, a Teoria Antropológica do Didático (TAD) se utiliza dos seis Momentos Didáticos, enquanto que a Teoria das Situações Didáticas (TSD) utiliza a dialética da devolução, aliada às quatro dialéticas: ação, formulação, validação, institucionalização.

O desenvolvimento da TAD levou a introduzir vários construtos teóricos que constituem avanços importantes para a Didática da Matemática. Elencamos de forma sucinta alguns desses construtos a seguir:

1. **Análise das dimensões epistemológica** e **econômica-institucional** de um objeto matemático. Para Barquero, Bosch e Gascón (2013) a dimensão epistemológica se

faz importante e presente em todo e qualquer problema didático, pois é nela que buscamos entender:

a) A amplitude do âmbito matemático para situar nosso problema didático;
b) Os tipos de problemas oriundos do ensino e da aprendizagem, a partir da problemática;
c) As tentativas de abordar e até mesmo solucionar tal problemática;
d) Quais as razões de ser desse objeto matemático e da problemática do seu ensino.

2. **A análise da dimensão econômica** para identificar como as praxeologias se comportam em uma determinada instituição? Formam parte da dimensão económica as questões relativas às condições que regulam a organização e o funcionamento de tais praxeologias na instituição de referência, ou seja, as questões relativas ao sistema de regras, princípios e leis (normas) que regem a vida institucional da mesma.

3. **Análise da dimensão ecológica** de um problema didático: A dimensão econômica-institucional permeia a dimensão ecológica, uma vez que o "nascimento", a "vida" e a possibilidade de "fenecimento" e/ou "ressurgimento", prescindem das condições econômicas. Isso é destacado por Gascón (2011) e Barquero, Bosch e Gascón (2013), quando dizem que a dimensão ecológica, dentre outros fatores, deve evidenciar:
   a) Os âmbitos institucionais considerados;
   b) As instituições envolvidas e as maneiras como descrevem e interpretam o objeto pesquisado;
   c) As práticas matemáticas existentes nas instituições envolvidas relativas ao objeto pesquisado;
   d) Os modelos epistemológicos da matemática envolvida no seio das instituições;
   e) As dificuldades que surgem ao se tentar modificar as OD em uma determinada instituição.

Essas evidências permitem, por exemplo, de situar, em termos da Didática da Matemática, os ***habitat*** e ***nichos*** do objeto matemático em estudo no ecossistema do nível da instituição escolar considerada. Os ***habitats*** serão os ambientes conceituais onde o objeto "quadriláteros" encontra-se e vivencia suas práticas. Os ***habitats*** serão os setores de um ecossistema onde os componentes curriculares dão guarida às praxeologias com o objeto matemático. Os ***nichos***, por sua vez, contemplarão as suas funcionalidades e praxeologias, que se evidenciam pelas práticas que, em relação a um objeto de ensino, se evidenciam em um dado ***habitat*** de certo ecossistema, interagindo com os demais ***nichos***.

O estudo da dimensão ecológica deverá nós auxiliar no estudo da **Ecologia Didática do objeto matemático "Quadriláteros", permitindo questionar a sua real existência, ou inexistência, ou possibilidades de ressurgir**, no sistema educativo considerado. A ecologia de uma organização praxeológica, associa-se às condições que pesam sobre sua construção e sua "vida", normalizadas tanto nas instituições de ensino como nas de produção, de utilização e/ou transposição de saberes.

Com relação à Ecologia Didática, Artaud (1998, p. 102-103) identifica quatro tipos de ecossistemas de ensino, segundo o regime epistemológico ao qual é submetido o saber matemático:

a) **Ecossistema do saber**, onde se produz a matemática;
b) **Ecossistema didático escolar**, onde se estuda a matemática;
c) **Ecossistema profissional**, utilizador da matemática para concretizar algumas tarefas;
d) **Ecossistema noosferiano**, onde a matemática é manipulada para fins de transposição.

4. **Dimensão econômica x dimensão ecológica**: Para estudar as dimensões económicas e ecológicas da problemática didática, o pesquisador (ou professor) usa inevitavelmente - como referência - um modelo (muito das vezes implícito) das praxeologias matemáticas que estão em jogo, isto é, um modelo epistemológico de referência (MER) do campo da atividade matemática em questão. Quando o Modelo Epistemológico de Referência (MER) é abertamente e explicitamente exposto à crítica e ao contraste empírico, ele constitui um instrumento de emancipação (da didática e ciência didática) no que diz respeito ao modelo epistemológico dominante (MED) na instituição (GASCÓN, 2014). Em coerência com esta MER e com base nela, o formador (ou pesquisador) utiliza (e, eventualmente, constrói) um modelo didático de referência (MDR) do que significa «aprender» conhecimentos matemáticos do referido campo, em nosso caso, o objeto matemático estudado.

5. Chevallard (2009, p. 6) mostra que muito dos eventos que ocorrem no interior da sala de aula são influenciados por variáveis externas a ela, cujo conjunto foi denominado por **níveis de co-determinação**

Olhando para estrutura educacional de um dado sistema educativo, vamos analisar a legislação que disciplina o ensino e os instrumentos com o quais a sociedade exerce sua influência na escola; desde a creche (destinado às crianças de 0 (zero) a 3 (três) anos de idade) à pós-graduação (Doutorado – último nível de escolarização contemplado na legislação);

Civilização
↓↑
Sociedade
↓↑
Escola
↓↑
Pedagogia
↓↑
Disciplina
↓↑
Área
↓↑
Setor
↓↑
Tema
↓↑
Questão

Tal estrutura, dentro do esquema representativo proposto por Chevallard, corresponde ao elemento escola no universo de níveis de co-determinação de influência do processo de transposição didática definida pelo referido autor. Podemos conjecturar que a representação dos níveis de co-determinação da Transposição Didática de um dado sistema educativo tem um componente complexo- a estrutura educacional- que inicialmente se divide em Educação Básica e Superior, sendo que ambos se subdividem, constituindo novas estruturas também subdivididas.

Os níveis da co-determinação didática em uma análise institucional permitem evidenciar as influências em um sistema educativo, mais especificamente, no diz respeito ao conteúdo matemático em estudo. O que exigiria analisar os processos transpositivo (CHEVALLARD, 1991) do objeto matemático estudado confirme a estrutura representada na figura 3.

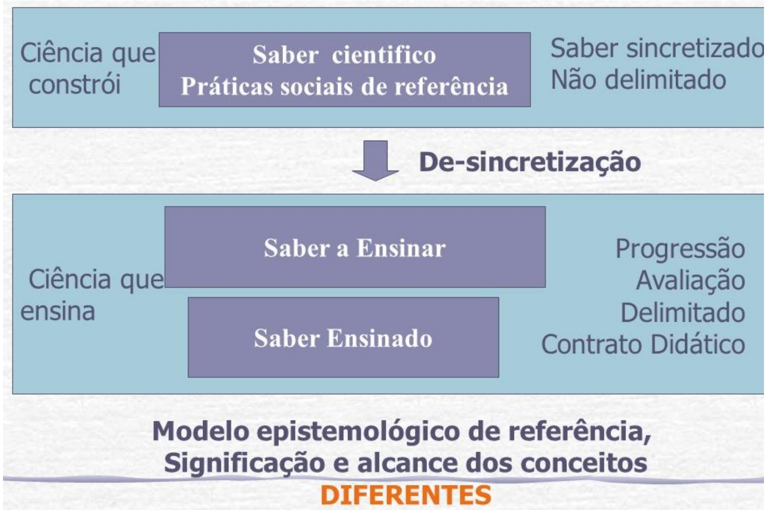

Figura 3: processo de transposição didática. **Fonte**: construção do autor

Os diferentes textos deste número especial sobre a TAD aportarão várias contribuições que evidenciam a importância dessa teoria na compreensão de fenômenos relacionados ao ensino e à aprendizagem da matemática.

Referências

Almouloud, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ARTAUD, M **(1997) Introduction à l'approche écologique du didactique, L'écologie des organisation mathématiques et didactiques**. InC. Comitictal. (*eds*) Actes de la IX[è] école d'été de didactique des mathématiques, Houlgate, pp. 101-119.

BAGES, Sébastien. **Qu'est-ce qu'une Théorie Scientifique ?** (in http://civilisation2.org/quest-ce-quune-theorie-scientifique/ , acessado no dia 12/12/2014), 13 de março de 2012.

BARQUERO, B., BOSCH, M. e GASCÓN, J. ***Ecología de la modelización matemática:*** *Restricciones transpositivas en las instituciones universitárias*. communication au 2e congrès TAD, Uzès 2007.

BARQUERO, B., BOSCH, M. e GASCÓN, J. ***Ecología de la Modelización Matemática:*** *los Recorridos de Estudio e Investigación* - III International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic, 2010.

BARQUERO, B., BOSCH, M. e GASCÓN, J. ***Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática.*** Educação Matemática e Pesquisa, São Paulo, v.15, n.1, pp.1-28, 2013

BOSCH, Marianna; GASCON, Josep. Las prácticas docentes del profesor de matemáticas. *XIème École d'Été de Didactique des Mathématiques*. Agosto de 2001

BOSCH, Marianna. CHEVALLARD, Yves e GASCÓN, Josep. Science or magic? *The use of models and theories in didactics of mathematics. Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2006.

BOSCH, Marianna. Un Punto de Vista Antropológico: la evolución de los "instrumentos de representación" en la actividad matemática. Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. pp. 15-28. Espanha, 2001

BOSCH, Marianna; FONSECA, Cecílio; GASCÓN, Josep. Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales em las instituciones escolares. In: Recherches en Didactique des Mathématiques, v. 24/2.3, Grenoble, França: La Pensée Sauvage, 2004, p. 205-250.

BOSCH, Marianna, CHEVALLARD, Yves. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble : La Pensée Sauvage-Éditions, v.19, n°1, p.77-124, 1999.

BROUSSEAU, Guy. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble : La Pensée Sauvage, v.7, n°2, p.33-115, 1986.

BROUSSEAU, Guy. Théorie des situations didactiques. Textes rassemblés et préparés par Nicolas Balacheff, Martin Cooper, Rosamund Sutherland, Virginia Warflied, Grenoble : La Pensée Sauvage éditions, 1998.

CHEVALLARD, Yves. L´analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 19.2, p.221-265, 1999.

CHEVALLARD, Yves. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble : La Pensée Sauvage-Éditions, v. 12.1, p.73-112, 1992.

CHEVALLARD, Yves. Organiser l´étude. 1. Structures & Fonctions. Actes de la 11 École d´Été de Didactique des Mathématiques. France : La Pensée Sauvage. 2002. Versão eletronica.

CHEVALLARD, Yves. Organiser l´étude. 3. Ecologie & régulation. Actes de la 11 École d´Été de Didactique des Mathématiques. France : La Pensée Sauvage. p. 41-55, 2002.

CHEVALLARD, Yves, JOHSUA, M. A. La transposition didactique. Grenoble : La Pensée Sauvage-Éditions, 1991.

ENGLISH, L.; SRIRAMAN, B. (coord.) RF04: Theories of Mathematics Education. In: Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.) Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1, pp. 170-202. Melbourne: PME, 2003. Disponível em: http://www.emis.de/proceedings/PME29/PME29CompleteProc/PME29Vol1Complete.pdf (Acesso em: 25 jun. 2012.)

LERMAN, S. Theories of Mathematics Education: Is Plurality a Problem?. In: SRIRAMAN, B.; ENGLISH, L. Theories of Mathematics Education Advances in Mathematics Education. SPRINGER, 2010, pp. 97-117.

PEGG, J.; TALL, D. The Fundamental Cycle of Concept Construction Underlying Various Theoretical Frameworks. In: SRIRAMAN, B.; ENGLISH, L. **Theories of Mathematics Education Advances in Mathematics Education**. SPRINGER, 2010, pp.173-192.

PERRIN-GLORIAN, M.J. (1994). Théorie des situations didactiques: naissance, développement, perspectives, *in* Artigue, M. & al.(org.): **Vingt ans de didactique des mathématiques en France.** *Recherches en Didactiques des Mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage Editions, p.96-147.

PERRIN-GLORIAN, M.J (1995). **Utilisation de la notion de obstacule en didatique des mathematiques.** Grenoble: Séminaire de l'IUFM de Grenoble.

PERRIN-GLORIAN, M.J (1986). **Représentation des fractions et des nombres décimaux chez les élèves du CM2 et du collège**, Cahier de Didactique des Mathématiques. Paris: IREM Paris 7, v.24.

ROBERT, A. **Les recherches surl es pratiques des enseignants et contraintes de l´exercice du métier d´enseignant.** *Recherches en Didactique des Mathématiques. 2001, 21/1.2, p. 5780.*

SFARD, A. **On the dual nature of Mathematical Conceptions**: Reflections on Process and Objects as Different Sides of The Same Coin. Netherlands: Kluwer Academic Publishers. Educational Studies in Mathematics 22, pp. 1-36, 1991

SRIRAMAN, B.; ENGLISH, L. Surveying Theories and Philosophies of Mathematics Education. In: SRIRAMAN, B.; ENGLISH, L. **Theories of Mathematics Education Advances in Mathematics Education**. SPRINGER, 2010, pp. 3-32.

TALL, D. **Reflections on APOS theory in Elementary and Advanced Mathematical Thinking**. PME 23, Haifa, Israel, julho, 1999. Disponível em: <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1999c-apos-in-amt-pme.pdf> (Acesso em: 26 junho 2012)

WIKIPÉDIA. **Teoria cientifica** (In http://pt.wikipedia.org/wiki/Teoria, acessado no dia 12/12/2014),