95
243
ISSN (versão *online*): 2317-5125
Amazônia
Revista de Educação em Ciências e Matemáticas

Pensando sobre relógios e ângulos

Thinking about watches and angles

John A. Fossa | PPGEd e PPGECNM/UFRN - Natal, RN

Resumo

Partindo de um problema simples (determine todas as configurações dos ponteiros de um relógio que formam um ângulo reto), descrevem-se várias maneiras em que se pode pensar sobre o problema.

Palavras-chave: educação matemática; resolução de problemas; pensamento metacognitivo.

Abstract

Starting from a simple problem (determine all the configurations of the hands of a clock that form right angles), various ways in which one can think about the problem are presented.

Keywords: mathematics education; problem solving; metacognitive thinking.

Introdução

Um dos recursos pedagógicos usados[1] para o estudo de ângulos é o de um modelo da face de um relógio. O referido recurso tem certo interesse histórico, pois é, implicitamente, um exemplo de problema de tipo[2] "perseguir", em que dois ou mais protagonistas (homens, cavalos, carros, *etc.*) correm, com velocidades diferentes, ao redor de um circuito e pede-se para determinar os lugares e/ou tempos das conjunções, isto é, os instantes em que estarão no "mesmo lugar". Esses, por sua vez, são versões simples do problema difícil de determinar as conjunções da lua com o sol e/ou os alinhamentos dos planetas.

Em atividades desse tipo, o aluno investiga o ângulo feito pelos ponteiros, ou, alternativamente, procura descobrir em quais horas os ponteiros formam um determinado ângulo. Consideremos o problema de determinar todos os tempos em que os ponteiros formam um ângulo reto; no entanto, não temos tanto a intenção de descrever a atividade em si, quanto de descrever maneiras possíveis de pensar sobre a essa atividade. Queremos "pensar em voz alta" para "modelar" o pensamento metacognitivo[3], em que o pensador está ciente do seu próprio pensamento e das estratégias que usa para resolver o problema, pois o discurso matemático professor/aluno geralmente é muito linear, enquanto o pensamento usado para resolver problemas é geralmente bastante não linear. Espera-se que o aluno tenha mais sucesso em desenvolver suas próprias habilidades metacognitivas ao ver outras pessoas pensar dessa maneira. Assim, a seguinte discussão pode ser usada como leitura a ser analisada (na formação de professores) ou como base para um estudo dirigido na sala de aula.

O problema dos ângulos retos

Observamos, inicialmente, que todas as posições possíveis dos ponteiros ocorrem em um período de doze horas, pois, depois desse período, a sequência de posições se repete, na mesma ordem, em cada período subsequente de doze horas. Ainda mais, dentro do referido período, não há outra "hora" em que os dois ponteiros voltam à configuração inicial. Isso significa que a solução completa será obtida uma vez que o problema for resolvido para um período de doze horas. Desta forma, basta começar à "zero hora" (ou ao meio-dia), quando os dois ponteiros estão juntos no número doze, e considerar o que acontece no período em consideração.

O problema pode ser solucionado muito rápido, por inspeção, se consideramos primeiramente um caso especial. Isto é, mantemos o ponteiro das horas fixo no ponto 12 e permitimos o dos minutos girar ao redor do relógio. Ao fazer isso, vemos que os ponteiros

[1] Ver, por exemplo, o interessante relato de Lopes (1999).
[2] Ver também Fossa (2010).
[3] Ver, por exemplo, Duell (1986).

fazem um ângulo reto quando o ponteiro dos minutos aponta para o número 3, isto é, aos quinze minutos (ver a Figura 1).

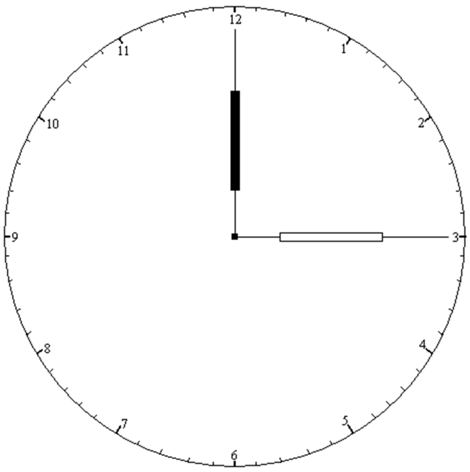

Figura 1.

Na Figura 1, como em todas as outras figuras do presente trabalho, optamos por fazer os dois ponteiros do mesmo tamanho para facilitar a leitura do tempo. No entanto, para distinguir entre essas entidades distintas, que têm características distintas, representamos o ponteiro das horas em preto e o dos minutos em branco. Doravante, faremos referência aos ponteiros pela cor, chamando-os assim: o das horas, "o ponteiro preto" e o dos minutos, "o ponteiro branco".

Ao deixar o ponteiro branco continuar seu percurso ao redor do relógio, percebemos que a única outra configuração em que se forma um ângulo reto ocorre quando o ponteiro branco aponta para o número 9, ou seja, aos 15 minutos para 12 (ver a Figura 2). Isso significa que, no caso especial em que o ponteiro preto está fixo em 12, só há duas posições do ponteiro branco que resulta em um ângulo reto, a saber, 15 minutos antes, ou 15 minutos depois, de 12.

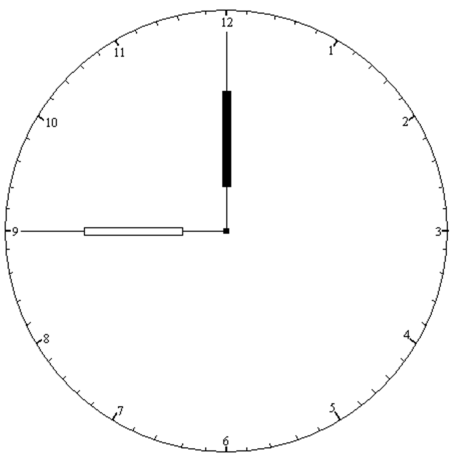

Figura 2.

Visto esse caso especial, percebemos que o mesmo acontece para toda posição fixa do ponteiro preto: haverá apenas duas configurações resultando num ângulo reto, uma em que o ponteiro branco está quinze minutos antes da posição do preto e uma em que está quinze minutos à frente do preto. Observamos ainda que o resultado não é válido apenas para as posições em que o ponteiro preto aponta para uma hora inteira, ou seja, 12h50 e 1h20 (para o ponteiro preto no número 1), 1h55 e 2h25 (para o ponteiro preto no número 2), *etc.*, mas também para posições intermediárias. A Figura 3, por exemplo, mostra o que acontece quando o ponteiro preto aponta para 7 minutos. Há um ângulo reto quando o ponteiro branco aponta para 7+15 = 22 minutos. Há também outro quando o ponteiro branco está quinze minutos antes do preto, ou seja, quanto aponta para 52 minutos.

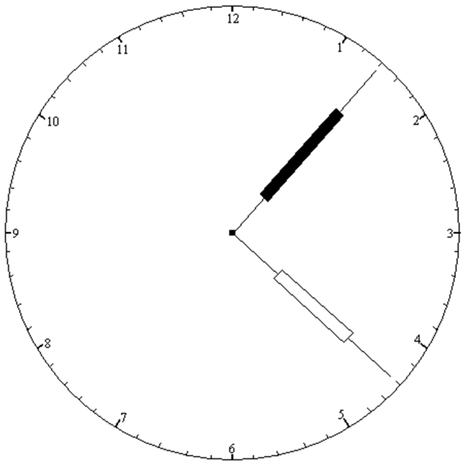

Figura 3.

Finalmente, observamos que é pouco elegante referir à posição dos ponteiros por frases como "à frente", *etc.* Assim, podemos usar a linguagem de congruências para expressar sucintamente a solução do nosso problema. Sejam, então, p_b a posição do ponteiro branco e p_p a posição do ponteiro preto, ambas medidas em minutos. Com essa convenção, os ponteiros formarão um ângulo reto quando $p_b = p_p \pm 15 \pmod{60}$.

Um novo modelo

O recurso que estávamos discutindo até agora não é um relógio de verdade, mas apenas um modelo de um relógio. Para o contexto em que é utilizado – uma abordagem inicial sobre ângulos –, é perfeitamente adequado. No entanto, o aluno mais velho poderia perceber que o modelo usado não é inteiramente preciso e, assim, poderia gostar de investigar um modelo mais exato.

Caso o aluno não perceba a inexatidão do modelo, basta olhar um relógio de verdade, por exemplo, às 12h15. Verá que, nessa hora, embora o ponteiro branco esteja apontando para o número 3, o ponteiro preto já não aponta bem para o número 12, pois nos 15 minutos que o ponteiro branco usou para andar de 12 para 3, o ponteiro preto também estava em movimento e, portanto, encontra-se em algum ponto entre 12 (horas) e 1 (hora). É de se esperar que, visto que 15 minutos são $\frac{1}{4}$ de uma hora e que o ponteiro preto leva uma hora para andar de 12 para 1, o ponteiro preto esteja a $\frac{1}{4}$ da distância de 12 e 1. Isto é, estará apontando para 1 minuto e quinze segundos. Essa observação mostra que os ponteiros não formam um ângulo reto às 12h15. Pior ainda, em um relógio de verdade, os ponteiros nunca se configuram como são retratados na Figura 1!

Bem, sempre (ou, pelo menos, quase sempre) que se faz um modelo, também se fazem algumas suposições que simplificam a complexidade da realidade que está sendo modelada. No caso do modelo considerado acima, supusemos que os ponteiros se movimentam independentemente. Dito de outra forma, supusemos que, dados dois pontos quaisquer da circunferência do relógio, há um tempo em que o ponteiro preto aponta para o primeiro e o ponteiro branco aponta para o segundo. Mas, já vimos que essa suposição não é verdadeira para um relógio de verdade, pois não há, por exemplo, "hora" alguma em que o ponteiro preto aponta para 12 e o branco aponta para 3. Não obstante, o contrário acontece, às 3h00 horas. Assim, precisamos procurar um modelo que leve em conta o movimento conjunto dos ponteiros.[4]

Não será necessário, contudo, começar do início e criar um modelo completamente novo. Basta "dessimplificar" o modelo atual, tentando descrever melhor o movimento conjunto dos ponteiros. Lembrando que o problema é, como já havíamos mencionado, um caso especial de problema de tipo "perseguir", poderemos tentar representar o referido movimento através de expressões algébricas que descrevem as velocidades dos ponteiros.

Visto que $\mathbf{velocidade} = \frac{\mathbf{distância}}{\mathbf{tempo}}$, precisamos de uma maneira de calcular a distância que um ponteiro anda em um determinado tempo. Inicialmente, isso pode parecer um problema intricado, pois as distâncias percorridas pelos ponteiros são arcos da circunferência, não distâncias lineares. Quando lembramos, porém, que a escolha de uma unidade de medida é uma convenção, somos levados a fazer uma escolha que evita a necessidade de retificar os arcos. Fazemos isso ao escolher um arco da própria circunferência como a unidade de distância. Em particular, observamos que as marcas indicando os minutos parecem ser distribuídas ao redor da circunferência do relógio em intervalos iguais. Assim, será muito natural escolher a distância entre duas dessas marcas sucessivas como a unidade procurada. Ao fazer isso, as referidas marcas são investidas com um duplo significado, pois representam tanto intervalos de tempo, quanto intervalos de distância. Isso, uma vez abordado conscientemente, não deve ser muito problemático para o aluno, pois ele já está acostumado com mudanças de referências no relógio. O intervalo de 12 para 1, por exemplo, representa cinco minutos com referência ao ponteiro branco, mas uma hora com referência ao ponteiro preto.

Ainda suporemos que os ponteiros se movimentam uniformemente em relação às marcas de distância, o que nos permite estabelecer as velocidades dos ponteiros como sendo da forma $\boldsymbol{v = \frac{d}{t}}$, onde *v* representa a velocidade, *d* a distância e *t* o tempo.

Mediremos a distância em "unidades" – isto é, os pequenos arcos de circunferência identificados no parágrafo anterior – e o tempo em minutos. Assim, a velocidade terá a dimensão de unidades/minuto.

[4] Observamos que problemas desse tipo eram muito comuns nas provas das antigas vestibulares.

Visto que o ponteiro preto leva 60 minutos para percorrer cinco unidades de distância, sua velocidade, v_p, será dada pela razão $\frac{5}{60}$ (= $\frac{1}{12}$). Nesses mesmos 60 minutos, o ponteiro branco percorre 60 unidades de distância e, portanto, sua velocidade, v_b, será dada pela razão $\frac{60}{60}$ (= $\frac{1}{1}$). Assim, ao convencionar que d_p e d_b significam, respectivamente, a distância percorrida pelo ponteiro preto e a percorrida pelo ponteiro branco, obtemos as seguintes fórmulas para essas distâncias:

$$d_p = \frac{t}{12} \text{ unidades}$$

$$d_b = t \text{ unidades.}$$

Ao substituir valores convenientes para o tempo t (medido em minutos), verificamos que as fórmulas parecem estar em conformidade com as nossas intuições sobre o funcionamento de relógios de verdade. Em particular, para $t = 0$, temos $d_p = d_b = 0$, ou seja, na "zero hora", ambos os ponteiros apontam para o número 12 na face do relógio. Para $t = 60$, temos $d_p = 5$, $d_b = 60$; isso significa que o ponteiro preto aponta para o número 1 e o branco aponta para o número 12, a configuração que esperamos para "uma hora" (1h00). Mais geralmente, seja n qualquer um dos números que aparecem no rosto do relógio (isto é, os números que representam as horas). Então, para $t = n\times 60$, temos $d_p = 5n$, $d_b = n\times 60$; isso significa que o ponteiro preto aponta para o número n e o branco aponta para o número 12, a configuração que esperamos para "n horas" (nh00). Finalmente, para $t = 15$, temos $d_p = \frac{5}{4}$, $d_b = 15$; assim, o ponteiro branco aponta para 15 minutos e o preto aponta para 1 minuto e 15 segundos, a configuração que já havíamos calculado para 15 minutos depois da "zero hora" (12h15).

Visto, então, que as equações achadas conformam às nossas expectativas nos casos indicados, temos evidência *prima facie* para concluir que o modelo definido pelas referidas equações é razoavelmente preciso. Desta forma, podemos caracterizar todas as configurações possíveis dos ponteiros de um relógio através do seguinte par ordenado:

$$(d_p, d_b) = (\frac{t}{12}, t),$$

onde, é claro, o mesmo valor é dado para t em cada elemento do par. Observamos, mais uma vez, que a configuração da Figura 1 não é uma configuração possível de um relógio. Pois, se fosse, teríamos $(d_p, d_b) = (0, 15) = (\frac{t}{12}, t)$ e, portanto, $t = 0$ e $t = 15$ simultaneamente, o que é claramente impossível.

O Problema dos ângulos retos no modelo novo

De posse do nosso novo modelo, podemos tentar resolver outra vez o problema dos ângulos retos, isto é: determinar as "horas" em que os ponteiros do relógio formam um ângulo reto. Da análise que fizemos no modelo original, sabemos que a solução acontece sempre que os ponteiros são separados por 15 unidades de distância (essa condição claramente vale para o novo modelo também). Assim, fazemos (pois, visto que sempre teremos $d_b \geq d_p$, podemos desconsiderar o –15): $d_b - d_p = t - \frac{t}{12} = 15$, ou seja, $t = \frac{180}{11}$ minutos.

Desse modo, temos um ângulo reto às $16\frac{4}{11}$ minutos após “zero hora”, ou seja, aproximadamente aos 16 minutos e 22 segundos. No referido instante, o ponteiro preto aponta para $\frac{15}{11}$ unidades de distância, enquanto o ponteiro branco aponta para $\frac{180}{11}$ unidades de distância (ver a Figura 4).

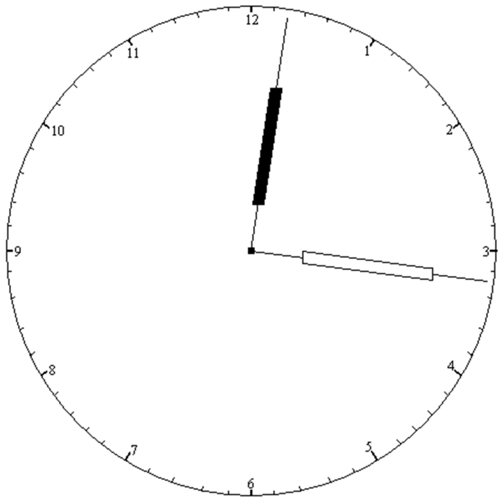

Figura 4.

O surpreendente da solução é que indica que há apenas uma só solução, pois a equação $t - \frac{t}{12} = 15$ tem solução única. Isso contraria as nossas intuições. No entanto, pode ser que não haja qualquer outra configuração possível – ou seja, uma configuração da forma $(d_p, d_b) = (\frac{t}{12}, t)$ – em que os ponteiros formam um ângulo reto.

A intuição e a resolução de problemas

Em relação ao problema em consideração, já falamos várias vezes sobre as nossas intuições, às vezes aceitando-as e às vezes rejeitando-as. Visto o resultado surpreendente da seção anterior, cabe aqui uma pequena reflexão sobre o papel da intuição na resolução de problemas, aproveitando-nos das situações que apareceram até agora nos nossos raciocínios sobre o problema dos ângulos retos.

Relembramos, primeiramente, da nossa intuição de que, para $1 \leq n \leq 12$, o ponteiro preto deve apontar para n, enquanto o ponteiro branco aponta para 12. Essa expectativa se deriva da nossa experiência com relógios de verdade e é tão forte que provavelmente rejeitaríamos qualquer modelo em que a referida expectativa não fosse satisfeita. Desta forma, poderíamos classificar essa expectativa não como uma intuição, mas como uma hipótese do problema.

Um outro tipo de situação ocorreu no uso do primeiro modelo, pois duas intuições conflitantes atuavam no nosso pensamento durante o uso desse modelo. Uma delas é que todo par ordenado de pontos na circunferência do relógio corresponde a alguma configuração possível (d_p, d_b) dos ponteiros. A outra é que os ponteiros se movimentam de forma uniforme em relação às marcas de medida no rosto do relógio. O que tornou a situação problemática foi que as duas intuições eram basicamente inconscientes. Foi só quando observamos que a Figura 1 não corresponde a 12h15, que fomos capazes de trazer as duas intuições à tona e decidir qual devemos aceitar e qual devemos rejeitar, o que, por sua vez, nos permitiu reformular o modelo.

Somos levados, porém, a ver a resolução de problemas como uma atividade guiada por certos propósitos e informada por nossas intuições. Isto é, talvez, especialmente evidente na construção de modelos para situações físicas. Mas, em todo caso, há um jogo sutil de adequação entre nossos propósitos e nossas intuições, que poderá, quando o jogo não é conduzido com destreza, levar a resultados inadequados (ou até desastrosos!). Infelizmente, não há receita para garantir destreza de pensamento nesse sentido, mas uma revisão cuidadosa dos nossos propósitos (e suas implicações), bem como uma tentativa séria de trazer à tona nossas intuições relevantes à situação problema que estamos considerando, ajudarão na elaboração de modelos mais adequados.

Finalmente, podemos nos deparar com uma situação do tipo exemplificado pela resolução do problema dos ângulos retos na seção anterior do presente trabalho. Não se trata, aqui, de procurar, pelo menos de imediato, alguma intuição inconsciente, pois o resultado obtido contraria as nossas expectativas e chama a nossa atenção para si mesmo. É, de fato, muito surpreendente que o problema tenha uma única solução, pois esperávamos que os ponteiros formassem um ângulo reto duas vezes em cada hora dentro do período relevante de doze horas. A consternação das nossas expectativas, porém, não decide a questão – apenas nos alerta de que há mais a fazer antes de considerarmos o problema resolvido. Devemos, ainda, investigar se nossa intuição está certa e, consequentemente, nossa análise errada, ou se nossa análise está certa e, consequentemente, nossa intuição errada.[5]

Uma nova tentativa de resolução

Pode ser que, ao nos depararmos com as duas alternativas relatadas na última sentença do parágrafo anterior, fiquemos sem inspiração de como proceder, pois já fizemos a análise que pensávamos cabível. Nesse tipo de situação, podemos sempre buscar inspiração no cálculo de alguns casos especiais. No exemplo, podemos calcular os valores das variáveis do problema para vários casos específicos da variável t para ver se, através disso, podemos perceber o que está acontecendo. Contudo, temos um problema de escolha, porque há um número infinito de valores que podemos utilizar. Para informar nossa escolha, portanto, faremos uso de outra fonte de inspiração – o modelo original. Isso funciona, às vezes, porque é um modelo mais simples e, assim, poderá permitir a percepção de alguma regularidade que obtém, ou obtém pouco modificada, no modelo novo.

Ao voltar para as Figuras 1 e 2, vemos, então, que as configurações procuradas ocorrem, no caso em que o ponteiro preto aponta para 12, quando t = 15 minutos e t = 45

[5] Há outras possibilidades, mas estas são as mais sugestivas, de imediato.

= 3×15 minutos. É também claro que, no modelo original, para o ponteiro preto fixo no tempo *t* minutos, os ângulos retos ocorrem quando o ponteiro branco aponta para *t*+15 minutos e *t*–15 minutos. Mas, pela natureza do relógio, *t*–15 minutos é igual a *t*+45 = *t*+(3×15) minutos. É, de fato, fácil ver que temos o seguinte ciclo: *t* = conjunção dos ponteiros, *t*+15 = ângulo reto, *t*+(2×15) = ângulo raso, *t*+(3×15) = ângulo reto, *t*+(4×15) conjunção dos ponteiros.

Tabela 1.

	t	d_b	d_p	d_b–d_p
1	$\frac{180}{11}$	$\frac{180}{11}$	$\frac{15}{11}$	15
2	$\frac{360}{11}$	$\frac{360}{11}$	$\frac{30}{11}$	30
3	$\frac{540}{11}$	$\frac{540}{11}$	$\frac{45}{11}$	45
4	$\frac{720}{11}$	$\frac{720}{11}$	$\frac{60}{11}$	60
5	$\frac{900}{11}$	$\frac{900}{11}$	$\frac{75}{11}$	75
6	$\frac{1080}{11}$	$\frac{1080}{11}$	$\frac{90}{11}$	90
7	$\frac{1260}{11}$	$\frac{1260}{11}$	$\frac{105}{11}$	105
8	$\frac{1440}{11}$	$\frac{1440}{11}$	$\frac{120}{11}$	120

É provável que algo semelhante aconteça no novo modelo. Devido ao movimento ininterrupto do ponteiro preto, porém, os intervalos do ciclo não acontecem a cada 15 minutos, mas a cada $\frac{180}{11}$ minutos. Para testar essa hipótese, calculamos, usando as fórmulas $d_p = \frac{t}{12}$ e $d_b = t$, os valores de d_b–d_p para os primeiros oito (dois ciclos) múltiplos de $\frac{180}{11}$ e os registramos na Tabela 1.

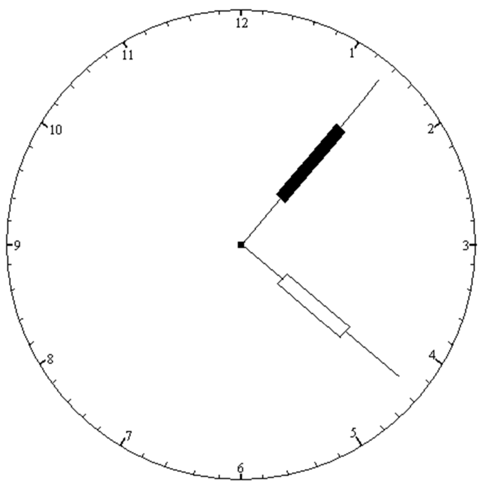

Figura 5.

Os dados da Tabela 1 parecem indicar que há mesmo uma solução única ao nosso problema, pois indicam que a função d_b–d_p é crescente. Isso, de fato, faz sentido, visto que a velocidade do ponteiro branco é 12 vezes maior do que a do ponteiro preto. Há, contudo, algumas regularidades intrigantes – sendo a mais importante a de que d_b–d_p aumenta em incrementos de 15 unidades –, o significado das quais talvez não seja evidente de imediato. Para tentar trazê-lo à tona, retratamos, na Figura 5, a configuração do relógio para $t = \frac{900}{11}$.

Da linha 5 da Tabela 1, vemos que o ponteiro preto aponta para $\frac{75}{11}$ minutos, ou seja, aproximadamente 6 minutos e 49 segundos. Também vemos que o ponteiro branco percorreu $\frac{900}{11}$ unidades de distância. Uma volta inteira ao redor da face do relógio, porém, é apenas $\frac{660}{11}$ unidades, o que significa que o ponteiro branco já está na sua segunda volta. Sua posição é $\frac{900}{11} - \frac{660}{11} = \frac{240}{11}$ unidades, ou seja, aproximadamente 21 minutos e 49 segundos. Desta forma, a separação entre os dois ponteiros, como a Figura 5 aparenta mostrar, é de 15 minutos e os ponteiros formam um ângulo reto. Confirmamos o resultado pelos seguintes cálculos: $\frac{240}{11} - \frac{75}{11} = \frac{165}{11} = 15$.

Tabela 2.

	t	d_b	d_p	d_b–d_p	p_b–p_p
1	$\frac{180}{11}$	$\frac{180}{11}$	$\frac{15}{11}$	15	15
2	$\frac{360}{11}$	$\frac{360}{11}$	$\frac{30}{11}$	30	30
3	$\frac{540}{11}$	$\frac{540}{11}$	$\frac{45}{11}$	45	45
4	$\frac{720}{11}$	$\frac{720}{11}$	$\frac{60}{11}$	60	0
5	$\frac{900}{11}$	$\frac{900}{11}$	$\frac{75}{11}$	75	15
6	$\frac{1080}{11}$	$\frac{1080}{11}$	$\frac{90}{11}$	90	30
7	$\frac{1260}{11}$	$\frac{1260}{11}$	$\frac{105}{11}$	105	45
8	$\frac{1440}{11}$	$\frac{1440}{11}$	$\frac{120}{11}$	120	0

Agora fica claro que a função d_b–d_p não representa a diferença entre as *posições* dos ponteiros, exceto durante a primeira volta do ponteiro branco, mas a diferença entre as *distâncias percorridas*. É importante reconhecer que não fizemos aqui um erro de matemática, mas um erro ao modelar corretamente nosso propósito. Representemos, então, a posição do ponteiro preto por p_p e a do ponteiro branco por p_b. Visto que, no período de doze horas que nos interessa, o ponteiro preto completa uma única volta, temos que $p_b = d_b$. Em contraste, seja k o número de voltas já completadas pelo ponteiro branco no instante t, então, no referido instante, $p_b = d_b$–$60k$. Para facilitar os cálculos, podemos definir k de maneira alternativa: seja k o maior número inteiro para o qual d_b–$60k$

≥ 0. Finalmente, observamos que podemos diminuir $60k$, não de d_b, mas de $d_b - d_p$, pois $p_b - p_p = (d_b - 60k) - d_p = (d_b - d_p) - 60k$.

Dadas essas considerações, é fácil acrescentar uma nova coluna à Tabela 1, dando a diferença entre as posições dos ponteiros (ver a Tabela 2).

Os dados da Tabela 2 nos permitem perceber o que está acontecendo. Após a configuração inicial na "zero hora", o ponteiro branco, que se movimenta mais rapidamente do que o preto, afasta-se deste até ter uma separação de 15 minutos (ou seja, 15 unidades de distância), onde eles formam um ângulo reto. Ao continuar a se afastar, chega ao ponto em que a diferença entre suas posições é de 30 minutos. Nesse ponto, os ponteiros apontam em direções opostas, formando um ângulo raso. Depois desse ponto, embora a separação continue a aumentar no sentido do movimento dos ponteiros, começa a diminuir quando medida no sentido oposto. Assim, os ponteiros formam um novo ângulo reto quando a separação alcança 45 minutos, ou seja, –15 minutos. Finalmente, os ponteiros se juntam de novo, isto é, têm separação de 0, e, assim, fecham um ciclo.

Os dados da tabela também indicam exatamente quando esses ângulos são formados. Seja $\boldsymbol{t_0 = \frac{180}{11}}$. Então, temos um ângulo reto em $\boldsymbol{t = kt_0}$ sempre que k for um inteiro ímpar. Ainda mais, temos um ângulo raso em $\boldsymbol{t = kt_0}$ sempre que k for um inteiro da forma $4n+2$ e os ponteiros se juntam em $\boldsymbol{t = kt_0}$ sempre que k for um inteiro da forma $4n$. Observamos ainda que, visto que a função $p_b - p_p$ é estritamente crescente em cada ciclo, não há outras soluções.

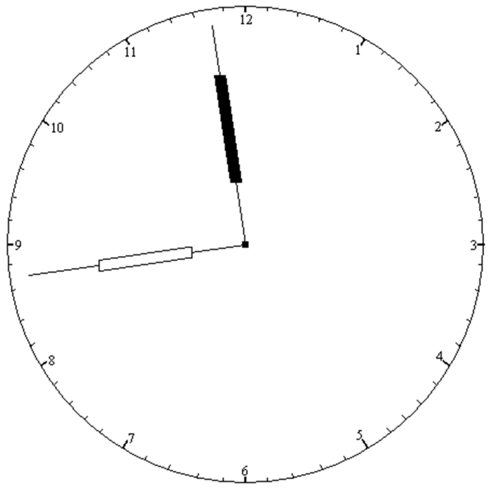

Figura 6.

Finalmente, podemos determinar o número de configurações distintas nos quais os ponteiros formam um ângulo reto, pois já vimos que os ponteiros voltam à posição da "zero hora" em 12 horas. Caso haja dúvida de que isso se obtém no novo modelo, é fácil verificar que, de fato, é verdadeiro. As referidas 12 horas correspondem a 720 minutos. Assim, $\boldsymbol{d_b = t = 720}$, que é um múltiplo de 60; portanto, $p_b = 0$. Ainda mais, $\boldsymbol{d_p = \frac{t}{12} = \frac{720}{12} = 60}$; logo, $p_p = 0$ também. Assim, a $t = 720$ minutos, os ponteiros voltam para a configuração da "zero hora". Desta forma, queremos determinar o maior valor de k, tal que $\boldsymbol{kt_0 \leq 720}$. Mas, $\boldsymbol{720 = 44 \times \frac{180}{11}}$ e, portanto, o referido valor de k é 44. Visto que há 22 inteiros ímpares menores do que 44, há exatamente 22 configurações distintas dos ponteiros que formam um ângulo reto. A Figura 6 mostra a última configuração, isto é, a que corresponde a k = 43, $p_b = \frac{480}{11}$, ou seja, aproximadamente 43 minutos e 38 segundos, e $p_p = \frac{645}{11}$, ou seja, aproximadamente 58 minutos e 38 segundos.

Outros problemas

No decorrer da nossa investigação também resolvemos mais dois problemas, pois sabemos as configurações para as quais os ponteiros formam um ângulo raso, bem como para as quais os ponteiros são coincidentes (ângulo de 0°). Há onze de cada tipo dentro de cada período de 12 horas. Aqui, nossas intuições poderiam indicar que, dentro de cada período de 12 horas, haja 24 configurações formando um ângulo reto e 12 configurações de cada um dos outros dois tipos de ângulo mencionados. No entanto, deve ser evidente, a partir da Figura 6, que essas intuições são erradas.

Muitos problemas interessantes nos levam a considerar ainda outras questões e o presente problema é um deles. O mais óbvio é a generalização do problema aqui considerado, ou seja, dado um ângulo θ, determinar todas as configurações do relógio em que os ponteiros formam um ângulo θ. Para usar o método aqui desenvolvido, é necessário determinar p_p e p_b para um ângulo arbitrário θ. Será que isto é sempre possível?

Outro problema óbvio é o problema inverso: dada qualquer configuração dos ponteiros, é possível determinar o ângulo formado pelos ponteiros?

Nos problemas já mencionados, é suposto que temos um relógio já calibrado pelo menos até os minutos. No entanto, como é que isto é feito? Dado uma circunferência, como poderíamos calibrar os minutos na circunferência? Isso poderia ser encarado de duas formas diferentes, a saber, através de algum processo de aproximação ou através da construção geométrica da unidade de medida. Uma ideia sobre como fazer a construção geométrica é inscrever um polígono regular de 60 lados na circunferência. Assim, será que todo polígono regular pode ser construído (com régua e compasso)? O de 60 lados pode ser construído?

Se quisermos usar congruências para expressar a solução como no primeiro modelo, teremos $p_b = p_p \pm 15 \pmod{60}$. Mas, será que é possível usar congruências quando p_p não é um número inteiro?

Seria interessante considerar os gráficos de alguns dos valores que apareceram no decorrer da solução do problema. Seja, por exemplo, $p(t) = p_b(t) - p_p(t)$. O que o gráfico dessa função nos diz sobre o problema?

Finalmente, para não delongarmos demais, apenas mencionamos que o método proposto para solucionar o problema poderá ocasionar uma investigação de equações paramétricas.

Conclusão

A construção do conhecimento matemático através do pensamento sobre situações problemas é um processo complexo que envolve, entre outras coisas, nossos propósitos e intuições. Ambos os propósitos e as intuições guiam nosso comportamento de várias maneiras e ambos os propósitos e as intuições podem ser modificados no decorrer da investigação. No presente trabalho, tentamos descrever esse processo através de modelar, por assim dizer, uma possível sequência de pensamentos sobre o problema dos ângulos retos. De certa forma, a sequência apresentada é bastante sofisticada, pois utilizou os propósitos e intuições, de maneira consciente, para reconhecer a inadequação do primeiro modelo, procurar hipóteses e procedimentos alternativos, avaliar resultados e aguçar a curiosidade sobre problemas relacionados.

Quando o aluno não dispõe de habilidades de pensar nesse nível de sofisticação, frequentemente não percebe a inadequação das suas próprias tentativas de solução, ou, percebendo a inadequação, fica frustrado e abandona a investigação. Assim, é importante – e não somente para a resolução de problemas matemáticos – que o aluno desenvolva essas habilidades metacognitivas. Sugerimos que isso pode ser feito através de modelos e prática. Por modelos, queremos dizer que o aluno precisa experienciar e analisar o pensamento metacognitivo de outros, por exemplo, dos seus professores. Por prática, queremos dizer que o aluno precisa pensar intensivamente sobre problemas que são suficientemente complexos para lhe permitir exercitar as referidas habilidades, preferencialmente junto com colegas e sob a supervisão de um professor, que poderá apoiá-lo quando necessário. Atividades como o problema dos ângulos retos poderão servir a essas duas finalidades.[6]

[6] Agradeço à colega Disnah Barroso Rodrigues pelas sugestões referentes à correção gramatical do presente trabalho.

Referências

DUELL, Orpha K. Metacognitive Skills. In: Gary D. PHYE & Thomás ANDRE. *Cognitive Classroom Learning: Understanding, Thinking and Problem Solving*. San Diego: Academic Press, 1986. [p. 205-242.]

FOSSA, John A. *Os primórdios da teoria dos números*. Natal: EDUFRN, 2010. [2 volumes.]

LOPES, Antonio José. Gestão de interações e produção de conhecimento matemático em um ambiente de inspiração lakatosiana. *Educação Matemática em Revista*, ano 6, n. 7, p. 19-26, 1999.